ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СОЦИАЛЬНО-
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

СЛЕТА Юлия Олеговна

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ АНАЛИЗУ УСЛОВИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
по специальности 5.8.2 – Теория и методика
обучения и воспитания (математика)

Научный руководитель –
доктор педагогических наук,
доцент
Ковалева Галина Ивановна

Волгоград – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Общество нуждается в высоко квалифицированных кадрах, способных быстро работать с разными видами и большими объемами информации, осуществлять эффективный анализ аргументов, альтернативных точек зрения, интерпретировать информацию, критически осмысливать опыт для принятия эффективных решений. Эта потребность обуславливает изучение математики как системообразующего предмета, развивающего интеллектуальные способности человека (в том числе способности к логическому мышлению) и тем самым влияющего на освоение других предметов. Как отмечают В.А. Крутецкий, Л.М. Фридман и др., решение задач является важнейшим видом учебной деятельности при изучении математики, в процессе которой развивается мышление учащихся, формируются их интеллектуальные способности, усваивается математическая теория. Исследователи в области методики обучения математике (Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Д. Пойя и др.) выделяют в процессе решения учебной задачи четыре основных этапа: осмысление условия задачи, поиск решения, осуществление плана решения, «взгляд назад». Именно этап осмысления условия учащимися является основополагающим, так как при этом происходит выделение структурных элементов задачи и связей между ними, сопоставление задачи с ранее решенными, с изученной теорией; сформированность данных действий обеспечивает выбор стратегии решения задачи. Однако учащиеся испытывают затруднения на этапе анализа условия задачи: не могут считать информацию, заложенную в фабуле задачи, построить чертеж, соответствующий условию задачи, не видят связей между известными величинами и требованиями задачи. Это подтверждает анализ результатов ГИА и ЕГЭ по математике за 2013-2021 г., представленный на официальном сайте «Федерального института педагогических измерений», в котором отмечается, что одним из факторов, вызывающим ошибки, остается недостаточный уровень понимания условия задач, а низкие результаты выполнения геометрических задач свидетельствуют о концептуальных недостатках в обучении геометрии, о необходимости пересмотра традиционных систем обучения с существенным акцентом на развитие умений смыслового чтения условия задач, геометрической интуиции и наглядных геометрических представлений.

Более 70% опрошенных нами учителей математики Волгоградской области основной причиной затруднения учащихся при решении планиметрических задач назвали несформированность действий, связанных с анализом условия.

Проблема анализа условия задачи становится особенно важной в условиях широкого использования учащимися сервисов и ресурсов сети Интернет. Пользователи Интернета быстро привыкают к возможности найти готовое решение или получить инструкцию, подсказку и т.п., как следствие – при самостоятельном решении задач, в том числе планиметрических, оказываются неготовыми анализировать информацию, заложенную в тексте, выделять данные, неизвестные и искомые величины, связи между ними. Проблема может быть решена при качественно новом рассмотрении сути этапа анализа условия задачи, при внедрении новых методики анализа условия, при новых подходах к анализу условия задачи.

Степень разработанности проблемы исследования. Исследователи-методисты отмечают необходимость специальной организации первого этапа решения задач через осознание данных, неизвестных и искомых величин, связей между ними, разбор и усвоение отдельных элементов условия, поиск необходимой информации в системе памяти ученика, подбор аналогов, похожих задачных ситуаций (Г.И. Саранцев); корректировку субъективного опыта, привлекаемого к решению, обучение языку математики (Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова); выявление свойств фигуры, непосредственно связанных с ее условием (Я.Е. Гольдберг); привлечение эвристической информации (Ю.М. Колягин, Л.М. Фридман); работу с образами объектов (понятий), описанных в задаче (С.Н. Дорофеев, А.Я. Цукарь). Понимая под анализом условия не только констатацию данных и искомых в фабуле задачи, но и выявление информации, которая непосредственно не задана условием, но присуща ему, исследователи-методисты (В.А. Далингер, Л.С. Капкаева, В.И. Крупич, В.И. Мишин) выделяют такие приемы получения информации из условия задачи, как прояснение незнакомых слов, постановка дополнительных вопросов, пересказ условия «своими словами», выведение следствий из условия. Но большинство из приемов нацелено на выявление явной информации. На наш взгляд выявлению неявной информации, связей между структурными элементами задачи не уделяется должного внимания.

Неумение и неготовность учащихся выявлять связи между структурными элементами задачи, как отмечают Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин и др., наиболее остро ощущаются при решении геометрических задач. Условия текстовых задач по алгебре, как правило, визуализируют в виде краткой записи, таблицы или сетевого графа, которые являются графическими представлениями структуры задачи, в которых явно представлены зависимости между данными, неизвестными и искомыми величинами. Основным средством визуализации условия геометрической задачи является чертеж, не указывающий явно на связь между структурными элементами задачи. Чертеж вместе с текстовой частью задачи представляет материал для логического анализа и геометрических обобщений (Г.А. Владимирский).

В.А. Гусев указывает, что чтение чертежа в процессе решения геометрической задачи связано с восприятием заданной фигуры, с её мысленной реконструкцией, с построением дополнительных элементов. При чтении и построении чертежа происходит создание геометрического образа. Однако учитель, как правило, фиксирует результат создания образа по чертежу, но не располагает набором заданий, позволяющих выстроить процесс создания образа.

Таким образом, обучение учащихся анализу условия планиметрических задач является необходимым условием формирования умения решать задачи, что определяет целесообразность разработки специальной методики.

Актуальность исследования обусловлена **противоречиями** между:

– значимостью анализа условия планиметрической задачи для ее успешного решения и недостаточной сформированностью у учащихся умений устанавливать связи между структурными элементами задачи, выполнять чертеж, соответствующий условию задачи и т. д.;

– востребованностью специально организованного этапа осмысления условия задачи и неразработанностью методики обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи.

Проблема исследования заключается в недостаточной разработанности теоретико-методических основ организации этапа анализа условия планиметрической задачи, что и определило выбор **темы исследования**: «Методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи».

Объект исследования – обучение учащихся основной школы решению планиметрической задачи.

Предмет исследования – процесс обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Цель исследования – разработать и обосновать методику обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Гипотеза исследования заключается в предположении о том, что обучение учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи будет проходить более эффективно, если:

– важнейшим приемом выявления информации, которая непосредственно не задана условием планиметрической задачи, но присуща ему, является варьирование структурных элементов задачи;

– умение анализировать условие планиметрической задачи включает как умения, позволяющие получить информацию из условия задачи без его непосредственного изменения, так и умения получать информацию из условия задачи при его изменении, графические умения;

– одной из приоритетных целей обучения учащихся основной школы решению геометрических задач станет формирование умения анализировать условие планиметрической задачи (целевой блок соответствующей методики), содержание обучения будет представлено в виде систем задач, направленных на формирование умений получать как явную, так и неявную информацию о структурных элементах задачи и связях между ними (содержательный блок методики), решение систем задач будет реализовано в условиях деятельностного подхода (процессуальный блок);

– соблюдаются дидактические условия, определяющие эффективность разработанной методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи в аспекте учета деятельностной составляющей использования систем задач, обеспечивающих формирование у учащихся умения анализировать условие планиметрической задачи.

Задачи исследования:

1) классифицировать приемы анализа условия планиметрической задачи;

2) построить структурную, уровневую и этапную модели умения анализировать условие планиметрической задачи учащимися основной школы;

3) разработать целевой, содержательный и процессуальный блоки методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи;

4) выявить дидактические условия эффективной реализации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Теоретико-методологической основой исследования являются положения системно-деятельностного (В.Г. Афанасьев, В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин и др.) подхода в образовании; основополагающие идеи задачного подхода в обучении математике (Г.А. Балл, Г.В. Дорофеев, Г.И. Ковалева, Ю.М. Колягин и др.); фундаментальные принципы теории и методики обучения математике (Л.В. Виноградова, В.А. Далингер, В.И. Мишин, Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова, Р.С. Черкасов и др.), в том числе геометрии (Н.М. Бескин, В.А. Гусев, И.М. Смирнова, В.Г. Чичигин и др.); основные положения методики формирования математических умений (О.Б. Епишева, С.Е. Ляпин, А.А. Столяр и др.); принципы методики обучения учащихся решению математических задач (Ю.Н. Кулюткин, В.И. Крупич, Л.М. Фридман, А.Я. Цукарь и др.), в том числе геометрических (Я.Е. Гольдберг, С.Н. Дорофеев, Г.И. Саранцев, З.А. Скопец, В.А. Смирнов, И.Ф. Шарыгин и др.).

Методы исследования: анализ психолого-педагогической и методической литературы по теме исследования, обобщение эмпирического материала, моделирование, тестирование, метод экспертных оценок, наблюдение, педагогический эксперимент.

Эмпирическую базу исследования представляют данные опытно-экспериментальной работы, в которой приняли участие 280 человек. В формирующем эксперименте приняли участие 86 учащихся МБОУ «ГСОШ №1 Городищенского района Волгоградской области»; в констатирующем и поисковом экспериментах – студенты и преподаватели ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», слушатели – учителя математики и преподаватели ГАУ ДПО «Волгоградская государственная академия последипломного образования».

Исследование проводилось в 2012–2021 гг. и включало три этапа.

На *первом этапе* (2012–2015 гг.) проведен анализ исследований по научной проблематике, существующей практики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи; разработан методологический аппарат исследования. На *втором этапе* (2015–2018 гг.) разрабатывалась методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи; проведен поисковый эксперимент. На *третьем этапе* (2018–2021 гг.) проведен формирующий эксперимент, сформулированы выводы и подведены итоги.

Положения, выносимые на защиту:

1. Основанием классификации приемов анализа условия планиметрической задачи является характер получаемой информации – явный (констатация данных, неизвестных и искомых) и неявный (установление связей между элементами задачи).

Основным приемом установления связей между структурными элементами планиметрической задачи является варьирование, при котором изменения одного элемента определяет следование или изменение другого. Варьирование заключается как в переформулировании задачи, так и в её изменении (замена числовых данных, объектов и/или отношений, добавление и/или изъятие условий, требований). При этом сконструированные задачи сравниваются с данной, что приводит к установлению связей между изменяемыми элементами задачи.

2. *Структурная модель* умения анализировать условие планиметрической задачи учащимися основной школы представлена статическим (умения, позволяющие получить информацию из условия задачи без его непосредственного изменения), преобразующими (умения, позволяющие получить информацию из условия задачи при его изменении), графическим (умения, связанные с графической интерпретацией задачи) компонентами.

Уровневая модель умения анализировать условие планиметрической задачи представлена четырьмя уровнями сформированности в зависимости от совокупности знания о структуре задачи, методах и приемах анализа условия планиметрических задач, полноты учета конкретных условий задачной ситуации, сформированности навыков построения чертежа, отвечающего условию задачи.

Процесс формирования умения анализировать условие планиметрической задачи проходит *три этапа*, цели которых соответственно: 1) адаптировать умения анализировать условие алгебраических задач к анализу условия планиметрических задач, 2) сформировать приемы анализа условия планиметрических задач, 3) сформировать умение анализировать условие нестандартизированных задач: вариативных, переопределенных, неопределенных, противоречивых, провокационных.

3. Методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи представлена целевым, содержательным и процессуальным блоками.

Целевой блок методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи включает: 1) глобальную (формирование умения у учащихся основной школы анализировать условие планиметрической задачи), 2) фазовые (отражают динамику умения анализировать условие планиметрической задачи в рамках учебных тем), 3) оперативные (достижимы при решении конкретной планиметрической задачи, в условиях диалога и пр.) и 4) интегративную (формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие любых задач) цели.

Содержательный блок методики представлен компонентными системами задач, направленными на получение как явно заданной информации, так и неявно заданной информации и отражение этой информации на чертеже. Компонентные системы задач включают задачи в соответствии со структурой формируемого умения с целью формирования каждого его компонента.

Специфику процессуального блока методики отражают такие методы обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи, как наглядные (изображение чертежа к задаче, работа на готовых чертежах), практические (построение чертежа и его изменение), индукция и дедукция (выведение основных геометрических закономерностей – основа анализа условия планиметрической задачи), проблемно-поисковые (учебные ситуации на выявление связей между условиями и требованиями задачи).

4. Основными дидактическими условиями реализации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи являются:

– включение в содержание школьного курса планиметрии компонентной системы задач;

– овладение учителем математики методикой обучения учащихся анализировать условие планиметрической задачи;

– реализация основных положений деятельностного подхода в процессе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

– включение в систему знаний учащихся эвристик по анализу условия планиметрической задачи;

– вовлечение учащихся в деятельность составления компонентной системы задач.

Научная новизна результатов исследования состоит в том, что впервые разработана методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи через использование системы задач, нацеленной на выявление информации о структурных элементах задачи и связях между ними. При этом впервые получены следующие научные результаты исследования:

– обосновано, что варьирование является основным приемом установления связей между элементами задачи;

– разработана структурная модель умения анализировать условие планиметрической задачи; критерии, показатели и уровни сформированности, этапы процесса формирования данного умения;

– обоснована специфика использования компонентной системы задач на каждом этапе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

– выявлены дидактические условия эффективной реализации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Теоретическая значимость результатов исследования состоит в том, что полученные выводы вносят вклад:

– в теорию и методику обучения математике за счет выделения варьирования как основного приема получения неявной информации при анализе условия планиметрической задачи; теоретического обоснования модели формирования умения анализировать условие планиметрической задачи; определения целевого, содержательного и процессуального блоков методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи;

– в теорию задачного подхода за счет описания процедур конструирования и использования компонентной системы задач на этапе анализа условия планиметрической задачи.

Полученные результаты исследования могут служить основой для решения научных проблем в области обучения учащихся основной школы решению планиметрической задачи.

Практическая ценность результатов исследования состоит в том, что:

– создано методическое обеспечение (учебные ситуации на выявление связей между условиями и требованиями задачи и методические рекомендации по их включению в процесс обучения решению планиметрических задач) обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи;

– сконструированы компонентные системы задач по разным темам школьного курса планиметрии («Решение треугольников», «Площади фигур», «Вписанная и описанная окружности», «Четырехугольники»);

– разработана диагностика уровней сформированности у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи.

Результаты исследования могут быть использованы учителями общеобразовательных школ в практике обучения учащихся решению планиметрических задач, а также преподавателями учреждений высшего образования, реализующих подготовку учителей математики.

Достоверность результатов исследования обеспечивается обоснованностью исходных теоретико-методологических позиций; использованием комплекса методов исследования; длительным характером опытно-экспериментальной работы по реализации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Апробация результатов исследования осуществлялась через:

– участие в международных, всероссийских и региональных научных и научно-практических конференциях: «Теория и практика обучения математике в условиях модернизации общего образования» (Волгоград, 2015), «Развитие современной науки: теоретические и прикладные аспекты» (Пермь, 2016), «Приоритетные научные направления: от теории к практике» (Новосибирск, 2016), «Современное образование: актуальные вопросы, достижения и инновации» (Пенза, 2017), Становление учителя будущего в пространстве дополнительного профессионального образования (Волгоград, 2020), «Инновационные методы обучения и воспитания» (Пенза, 2021).

– публикацию материалов исследования в различных научных и научно-методических изданиях (всего 18 работ, из них 7 статьей – в ведущих рецензируемых научных изданиях, определенных Высшей аттестационной комиссией Минобрнауки России).

Внедрение результатов исследования проводилось на базе МБОУ «ГСОШ № 1 Городищенского района Волгоградской области», МБОУ «Новонадеждинская СШ» Городищенского района Волгоградской области, МБОУ «ГСОШ № 1 Городищенского района Волгоградской области», МОУ «Лицей № 3 Тракторозаводского района Волгограда», МОУ «Лицей № 5 имени Ю.А. Гагарина Центрального района Волгограда».

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы (183 источника) и трех приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ АНАЛИЗУ УСЛОВИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

1.1. Приемы анализа условия планиметрической задачи

Определение степени разработанности проблемы исследования, выявление теоретических основ анализа условия планиметрической задачи как основополагающего этапа в процессе ее решения, описание констатирующего эксперимента и анализ его результатов – цели, решаемые в первом параграфе кандидатской диссертации.

Задача как цель и средство обучения математике, организации математической деятельности, формирования личностных качеств и интереса учащихся давно является объектом методических исследований. Однако до настоящего времени нет общепринятой трактовки понятия задачи. Л.М. Фридман [159], считая понятие проблемной ситуации исходным, определяет задачу как «всякую знаковую модель проблемной ситуации» и выделяет следующие составные части задачи:

1) предметная область, состоящая из одного или нескольких фиксированных объектов (предметов) или одного или нескольких фиксированных множеств;

2) предикаты, связывающие между собой объекты предметной области задачи.

Элементы и предикаты предметной области делятся на: а) постоянные и переменные; б) известные (данные) и неизвестные. Среди неизвестных элементов и предикатов выделяют искомые (те значения, которые требуется установить по требованию задачи); остальные неизвестные элементы и предикаты соотнесены к числу вспомогательных (определенных и неопределенных).

В структуре любой задачи Л.М. Фридман [160] выделяет три части: 1) условие задачи (обычно в высказывательной форме); 2) объект задачи (какой-либо элемент предметной области, или предикат, или правило вывода); 3) цель задачи (состоящая в нахождении значения объекта задачи, обращающего условие в верное высказывание).

Ю.М. Колягин [96] выделяет другие компоненты задачи: а) начальное состояние (У) – характеристика проблемности системы R (условие задачи); б) конечное состояние (З) – характеристика стационарности системы R (заключение задачи); в) решение (Р) – переход от начального состояния к конечному (преобразование условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого); г) базис решения (О) – теоретическая или практическая основа перехода от начального состояния к конечному посредством данного решения.

Анализ научно-методической литературы [96, 125, 159, 160] позволил представить структуру задачи (рис. 1.1):

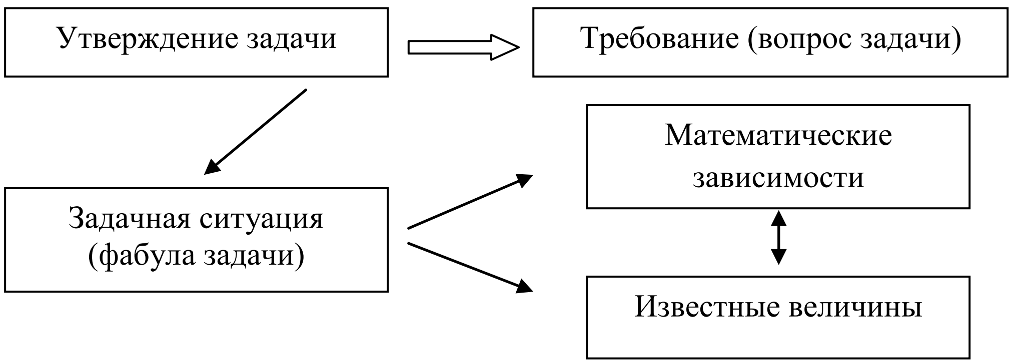


Рисунок 1.1 Структура математической задачи

Решить математическую задачу – значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которую к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче.

Методисты рассматривают решение задачи как этапный процесс [41, 96, 110, 125, 133, 147]. Общая логика и непротиворечивость этапов, выделенных ими, позволяет сформировать четыре этапа процесса решения задачи:

1. осмысление условия задачи (полное осознание задачной ситуации);

2. составление плана решения (выбор общего плана решения с использованием аналитико-синтетических рассуждений);

3. осуществление плана решения (обоснование каждого шага, правильное выполнение каждой операции);

4. изучение найденного решения (проверка правильности решения).

Первый этап является наиболее важным при решении задач. На нем происходит осознание условия, требования задачи и связей между ними, разборка и усвоение отдельных элементов условия (требования), поиск необходимой информации в системе памяти, подбор аналогов, похожих задачных ситуаций. Эффективное выполнение этих действий обеспечивает правильное решения задачи. Г.И. Саранцев пишет: «Успех в решении задач во многом определяется умением извлекать информацию из требования и условия задачи…». В.Г. Чичигин считает, что анализ есть ключ к решению задачи.

Однако у учащихся возникают различные трудности при решении геометрических задач. Так, А.М. Астряб [8] все трудности при решении геометрических задач на вычисление распределяет на три основные группы:

- трудности, связанные с рисунком;
- трудности, связанные с выбором необходимых теорем и необходимых формул;
- трудности арифметического и алгебраического характера.

Рассматривая первую группу трудностей, автор указывает на роль рисунка к геометрической задаче: с одной стороны, рисунок конкретизирует те величины, о которых идет речь в условии и с которыми ученику надо оперировать; с другой стороны – этот геометрический рисунок должен помочь ученику найти из целого ряда теорем и зависимостей ту зависимость, которая свяжет между собой величины, данные в задачи. В связи с этим, выделяет сложности, связанные с рисунком: представление и изображение формы, о которой идет речь в задачи. Часто тот рисунок, который ученик пытается сделать на доске, не только не помогает ему правильно представить геометрическую форму, но и еще больше запутывает и осложняет решение. К тому же решение большинства задач не ограничивается изображением фигуры, а предполагает ее анализ:

- уметь рассматривать ее в виде составных частей;
- уметь между составными частями выделить ту группу, ту комбинацию, которая поможет найти необходимую зависимость между данными;
- уметь проводить дополнительные построения фигуры, при помощи которых ученик сможет выделить из всего рисунка нужную ему форму, и при помощи этой формы получить ключ к решению задачи [8].

Вторая группа трудностей состоит в подборе теорем или формул, которые автор разделяет на несколько категорий:

- теоремы и формулы, которые основательно прорабатываются в школьном учебнике, трудность заключается в большом количестве известных теорем и невозможности выбора необходимой;
- теоремы и формулы, которые не являются перворазрядными, часто выпадают из поля зрения преподавателя и ученика.

Третья группа трудностей возникает из-за того, что ученик слабо овладел аппаратом преобразований как алгебраических, так и геометрических.

По мнению В.Г. Чичигина, особенно трудными для учащихся являются задачи на доказательство: в предложенной задаче учащиеся не видят задачи в привычном для них смысле (нет вопроса). Отсутствие привычного вопроса в явном виде приводит их в недоумение: в тексте задачи все дано – условие и заключение – в утвердительной форме. Вторая трудность состоит в том, что чертеж, сопутствующий задаче, сплошь и рядом подтверждает заключение теоремы [170].

При решении задач на построение наибольшие затруднения у учащихся вызывает этап анализа задачи. Учащиеся сталкиваются с проблемой – какие и в какой последовательности необходимо выполнить известные уже построения, чтобы построить искомую фигуру.

Из всего вышесказанного видно, что трудностей, с которыми имеет дело ученик, решающий геометрическую задачу, много. Однако наибольшие трудности учащиеся испытывают на этапе анализа условия, что не позволяет им приступить к решению задачи.

Это подтверждает и результат констатирующего эксперимента. Были опрошены 74 респондента. Ученикам восьмых и девятых классов Городищенской МБОУ СОШ №1 и студентам 5 курса ВГСПУ факультета МИФ было предложено выбрать приемы деятельности, применяемые в процессе решения задачи, вызывающие наибольшие затруднения. Среди них: выведение следствий из условия (56 человек); установление полноты, избыточности или недостаточности данных в условии (57 человек); построение чертежа (37 человек). Все перечисленные приемы относятся к анализу условия задачи. Данные анкетирования отражены в приложении 1.

Умение решать задачи образует сложный комплекс, содержащий математические знания и соответствующие им умения и навыки, опыт в применении знаний и определенную совокупность сформированных свойств мышления (мыслительные умения), проявляющуюся в процессе решения задач.

Ю.М. Колягин выделяет следующие основные мыслительные умения, характерные для процесса решения задач:

1. Анализировать данную ситуацию с целью выявления существенного (данные, известные, искомые, свойства и отношения); с целью установления полноты, непротиворечивости (или противоречивости), независимости (или зависимости) условия задачи и ее элементов.

2. Соотносить неизвестные элементы задачи с известными; распознавать известные элементы в различных сочетаниях; сопоставлять данную задачу с известными задачами.

3. Выявлять скрытые свойства задачной ситуации; создавать новые комбинации известных понятий и фактов, относящихся к элементам данной задачи, соотнося их с ее условием и целью.

4. Конструировать простейшие математические модели данной задачной ситуации; отождествлять элементы задачи с элементами модели.

5. Обнаруживать структуру данной задачной ситуации, задачи и ее элементов; воспроизводить эту структуру в различных состояниях.

6. Осуществлять мысленный эксперимент, предвидеть его промежуточные и конечный результаты; индуктивно строить гипотезы, высказывать разумнее догадки; расчленять данную задачу на подзадачи.

7. Ограничивать индуктивный поиск соображениями интуиции, логики и здравого смысла.

8. Интерпретировать результаты работы над моделью данной задачной ситуации.

9. Оформлять свои мысли (найденное решение задачи) кратко и четко; наглядно иллюстрировать ведущие идеи.

10. Критически оценивать результаты решения задачи с различных точек зрения (правильности, экономичности, значимости); обобщать результаты решения задачи; исследовать возможные частные и особые случаи.

11. Эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче и в процессе ее решения; систематизировать эту информацию, соотнося ее с имеющимися знаниями и опытом [96].

Заметим, что 1 – 5 умения, выделенные Ю.М. Колягином, относятся к этапу анализа условия задачи.

В.А. Гусев, рассматривая проблему решения геометрических задач, выделяет так называемые исследовательские умения, характерные именно для первого этапа решения задачи:

– умение выделять элементы задачи;
– умение находить фигуры, попадающие под этот элемент задачи;
– умение выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи;
– умение выявлять связи между полученными связями, которые, в конечном счете, приводят к решению этой задачи;
– умение оценивать полноту и непротиворечивость связей;
– умение строить структурный граф проведенного исследования (решения задачи) [46].

С.В. Гуревич выделяет следующие действия, связанные с построением чертежа, соответствующего тексту задачи:

– мысленное представление конфигурации геометрических фигур, соответствующих тексту задачи;
– процесс выполнения, с точки зрения решающего, наиболее наглядного изображения конфигурации геометрических фигур;
– нанесение на изображение специальных символов;
– полная проверка соответствия чертежа геометрической задаче (ее условию) [47].

Все из данных умений относятся к этапу анализа условия задачи.

Г.И. Саранцев, конструируя методику обучения учащихся решению геометрических задач, выделяет эвристические приемы анализа условия и поиска решения задач:

– извлечение информации из условия и требования задачи;
– выявление отдельных элементов, их мысленное соотнесение с требованием и условием;
– выполнение рисунка;

– выведение следствий из данных;
– переформулирование требования задачи;
– соотнесение с условием и заключением своих мыслительных действий; оценивание своих действий с точки зрения целесообразности;
– формулирование производных задач;
– распознавание ситуации, удовлетворяющей условию [133].

Я.И. Груденов, решая вопросы поиска решения задачи, формулирует для учащихся указания:

1) Ознакомиться с задачей: выполнить чертеж, выделить данное и искомое, выявить связи между ними и все возможные расположения фигур.

2) Попеременно двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними: искомое заменить такими утверждениями, из которых оно следует; получить следствия из данных.

3) Воспользоваться индуктивным методом: рассмотреть частные случаи, выполнить более точный чертеж, с помощью наблюдения выявить свойства фигур, сделать и рассмотреть модель.

4) Переформулировать задачу: изменить условие, решить задачу в частном случае, решить задачу, для которой данная является частным случаем.

5) Применить аналогию.

6) Применить нисходящий анализ.

7) Изложить решение, обосновывая каждый шаг. [42].

К этапу анализа условия автор относит указания из пункта 1. Пункты 2 – 6 относит к этапу поиска решения. Мы считаем, что пункты 2 и 4 следует так же отнести к этапу анализа условия.

Л.М. Лоповок выделяет следующие формы работы с условием, характерные для этапа анализа:

1. Изменение формулировки и условия. Суть этого приема заключается в том, что формулировка не изменяет математического

содержания задачи и может не затрагивать числовых значений параметров (хотя это не обязательно), но задача предстает перед учащимися в новом варианте, причем тождество начального и нового вариантов скрыто.

2. Изменение условия, при котором искомые и часть данных величин меняются местами.

3. Замена части данных условием вспомогательной задачи.

4. Замена приведенной в условии фигуры или конфигурации аналогичной [109].

С.Н. Дорофеев при обучении учащихся решению геометрических задач поднимает проблему распознавания геометрических образов, указывая, что это творческий процесс, требующий более тщательного анализа исследуемого объекта и связанный с формированием умения делать новое открытие в исследуемой ситуации. На наш взгляд, деятельность, связанную с распознаванием геометрических образов, так же целесообразно отнести к этапу анализа условия [62].

Анализ методической литературы позволил сформулировать общие действия адекватные первому этапу решения задачи и приемы получения информации из условия задачи:

Таблица 1.1

Действия на этапе анализа условия задачи, выделенные разными исследователями

	Ю.М. Колягин	**В.А. Гусев**	**Г.И. Саранцев**	**Я.И. Груденов**
Выявление данных задачи	анализировать ситуацию с целью выявления существенного	выделять элементы задачи	извлекать информацию из условия и требования задачи	выделять данные и искомое
Выявление связей между данными	соотносить известные элементы задачи с неизвестными	выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи	-	выявлять связи между данными и искомыми и все возможные расположения фигур

Выведение следствий из условия	распознавать элементы задачи в различных сочетаниях, создавать новые комбинации известных понятий и фактов	выявлять связи между полученными связями, которые, в конечном счете, приводят к решению этой задачи	выводить следствия из данных	получать следствия из данных, использовать все данные
Изображение чертежа	конструировать простейшие математические модели	находить фигуры, попадающие под этот элемент задачи	выполнять рисунок	выполнять чертеж
Оценка полноты и непротиворечивости условия	устанавливать полноту, непротиво-речивость и независимость	оценивать полноту и непротиворечивость связей	выявлять отдельные элементы, мысленно соотносить их с требованием и условием	-

Таблица 1.2

Приемы получения информации из условия задачи

Выявление данных задачи	Выявление связей между данными	Выведение следствий из условия	Изображение чертежа	Оценка полноты и непротиворечивости условия
Прояснение незнакомых слов; выделение главных слов, которые несут смысловую нагрузку; постановка дополнительных вопросов, раскрывающих сущность объектов; пересказ условия «своими словами»; интерпретация символических записей	Замена термина его определением; использование характеристических свойств понятия	Переосмысление объектов (фигур, отношений межу ними) с точки зрения других понятий; составление промежуточных задач	Наглядное изображение фигуры, нанесение на изображение специальных символов	Соотнесение условия задачи с имеющимися знаниями и опытом

Проиллюстрируем выделенные приемы на примере задачи:

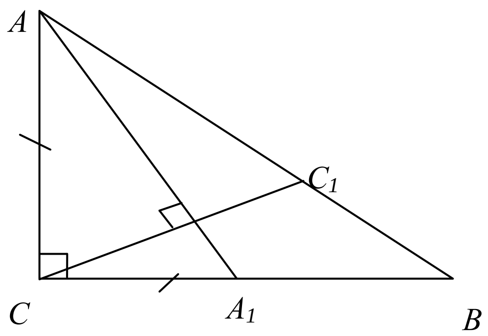


Рисунок 1.2. Чертеж по условию задачи

«*Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и медианой* AA_1. *Из вершины C проведен отрезок* CC_1, *перпендикулярный отрезку* AA_1 ($C_1 \in AB$). *В каком отношении точка* C_1 *делит отрезок AB?*» (Рис. 1.2.)

Сформулируем вопрос: что нужно знать, чтобы найти отношение $AC_1 : C_1B$? Непосредственного ответа на этот вопрос нет. Попробуем поставить вопрос по-другому: нельзя ли данное отношение заменить отношением, равным ему? (Преобразование требования задачи в равносильное.)

Для ответа на этот вопрос обратимся к условию задачи. (Вычленение треугольника *ABC*, медианы AA_1, перпендикуляра CC_1, переосмысление элементов чертежа в плане различных понятий, переход от термина «медиана» к определению понятия.) Наличие в условии задачи медианы треугольника актуализирует ассоциацию «медиана треугольника – точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1 от вершины», что в свою очередь вызывает мысль об нахождении на медиане AA_1 точки *K*, такой, что $AK : KA_1 = AC_1 : C_1B$. (Аналогия с данным требованием задачи).

Точка *K* легко найдется при актуализации «равенства отношений отрезков на сторонах угла – пересечение угла пучком параллельных прямых».

Итак, *K* – точка пересечения отрезка AA_1 и отрезка C_1D, перпендикулярного AC. Построение точки *K* позволяет переформулировать требование задачи в новое: найти отношение $AK : KA_1$ и составить задачу аналогичную данной. (Составление промежуточных задач).

В треугольнике ACC_1 K – точка пересечения двух высот, следовательно, прямая CK перпендикулярна AB. (Выведение следствий, переосмысление элементов чертежа в плане различных фигур, актуализация ряда специальных ассоциаций, постоянное соотнесение преобразований задачи с действиями с чертежом).

Поскольку $CK \perp AB$, а треугольник ABC – равнобедренный, то прямой CK принадлежит вторая медиана треугольника, а потому K – точка пересечения медиан треугольника ABC. Следовательно, $AK : KA_1 = 2 : 1$. Легко усмотреть в приведенных рассуждениях наличие почти всех перечисленных умений.

Рассмотренные умения, приемы и действия, характерные для этапа анализа условия задачи, позволяют разделить всю информацию, получаемую из условия, на несколько видов: а) информация, непосредственно заданная в условии; б) информация, полученная из условия. Поэтому ***под анализом условия планиметрической задачи будем понимать обработку конкретно заданной информации и выявление такой, которая непосредственно не задана условием, но присуща ему.***

Исходя из такого понимания анализа условия планиметрической задачи, проведем классификацию приемов получения информации. Первая группа приемов выявления информации констатирует данные, неизвестные и искомые в фабуле задачи. Приемы второй группы нацелены на установление связей между структурными элементами задачи. Все они основываются на каком-либо преобразовании задачи (замена условия или требования ему равносильным, вывод следствий из условия и пр.). Это позволяет выделить варьирование как прием установления связей между структурными элементами планиметрической задачи. Однако наше понимание варьирования не останавливается на переформулирование задачи в равносильную ей. Варьирование может заключаться и в изменении числовых данных, в замене объектов и/или отношений, в добавлении и/или изъятии структурных элементов (условий, требований). При этом могут получаться «новые» задачи, сравнение которых с данной приведет к установлению связей между изменяемыми элементами задачи. Предельными случаями варьирования могут быть задачи с несформированным требованием или условием. Первые позволят учащимся вывести следствия из условия задачи (сформулировать требования), вторые – найти достаточные условия для выполнения требования.

Рассмотрим примеры установления связей на конкретных задачах.

Задача: «*Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием 4,2 и боковой стороной 6,3*». Переформулируем задачу без указания того, что является основанием, а что боковой стороной: «Найдите периметр равнобедренного треугольника со сторонами 4,2 и 6,3». В первом случае задача имеет единственное решение, во втором случае задача решается аналогично, но уже имеет два решения. Переформулируем вторую задачу, изменив лишь числовые данные: «Найдите периметр равнобедренного треугольника со сторонами 3,9 и 7,9». Фабула задачи не изменилась, соответственно, учащиеся так же приведут два решения, но в данном случае это будет ошибкой, так как при одном из вариантов не будет выполняться неравенство треугольника. Таким образом, варьирование в данной задаче позволяет установить связь между числовыми значениями сторон треугольника – неравенство треугольника. Для исходной задачи очень важно – какая из сторон является боковой, а какая основанием.

Задача: «*В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 8,4 см, а угол A равен 30°. Найдите биссектрису BK*». В данной задаче можно варьировать различные элементы. Переформулирование требования, например, изменение биссектрисы на медиану или высоту не изменяет решение задачи. Это позволяет установить связь между медианой, биссектрисой и высотой, проведенными к основанию равнобедренного треугольника. Более того, в исходной задаче возможно изменение условия, которое приведет к тому, что биссектриса будет проведена не к основанию, а к боковой стороне. Чтобы решить задачу в данном случае надо провести высоту к той же боковой стороне. Во-первых, учащиеся осознают, что высота и биссектриса, проведенные к боковой стороне равнобедренного треугольника, не совпадают. Во-вторых, в обоих случаях решение задач сводится к решению прямоугольного треугольника.

Задача: «*Высота прямоугольного треугольника разбивает гипотенузу на отрезки 64 и 36. Найдите высоту и катеты данного прямоугольного треугольника*». Данная задача решается в теме пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Учащиеся должны понимать связь между всеми шестью элементами прямоугольного треугольника: «Зная любые два элемента, всегда можем найти остальные». Таким образом, варьирование исходных данных позволяет получить девять принципиально разных задач, которые для наглядности удобно оформить в таблицу.

Таблица 1.3

Варьирование данных к задаче о пропорциональных отрезках

a	b	c	a_c	b_c	h
			64	36	
80	60				
80		100			
80			64		
80					48
	60				48
		100	64		
		100			48
				36	48

Задача: «*В треугольнике ABC угол A равен 60°, AB = 5, AC = 8. Найдите BC*». В приведенной задаче теорема косинусов используется в явном виде. Составим задачу, где часть условия и требование поменяем местами: «В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, *BC = 7*, *AC = 8*. Найдите *AB*». В этом случае задача так же решается по теореме косинусов, но имеет отличие, так как неизвестная сторона оказывается в правой части формулы, что зачастую и вызывает сложность у учащихся. Таким образом, варьирование помогает установить связь между стороной, которую надо найти, и углом, который дан: сторона и противолежащий ей угол.

Таким образом, основным приемом установления связей между структурными элементами планиметрической задачи является варьирование, при котором взаимосвязь между данными и требованиями задачи устанавливается за счет изменения одного из элементов при следовании или изменении другого.

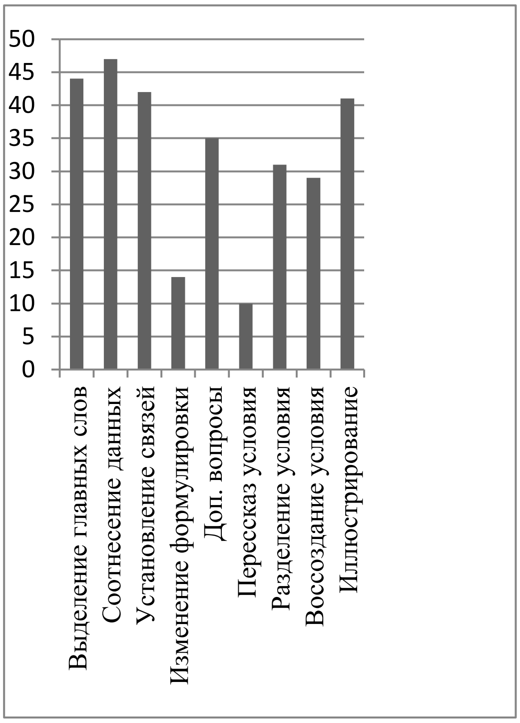
Варьирование задачи позволяет учащимся видеть и участвовать в процессе создания задач, обнаруживать новые свойства и отношения. В дальнейшем это поможет разбивать сложную задачу на подзадачи и устанавливать взаимосвязи между ними.

Приемы варьирования побуждают учащихся проводить более тщательный анализ заложенной в задаче информации и структурировать ее.

При очевидной важности первого этапа решения задач в методической литературе не уделяется должного внимания его организации: отсутствует методика формирования у учащихся умения анализировать условие задач.

С целью выделения приемов работы учителя на этапе анализа условия задачи нами был проведен эксперимент, в котором приняли участие 50 учителей математики г. Волгограда. Методом экспертных оценок были выбраны методические приемы, которые учителя часто (редко) используют при анализе условия планиметрической задачи. Результаты эксперимента приведены на рисунке 1.3.

Приемы, часто используемые учителями при анализе условия



Приемы, редко используемы учителями при анализе условия

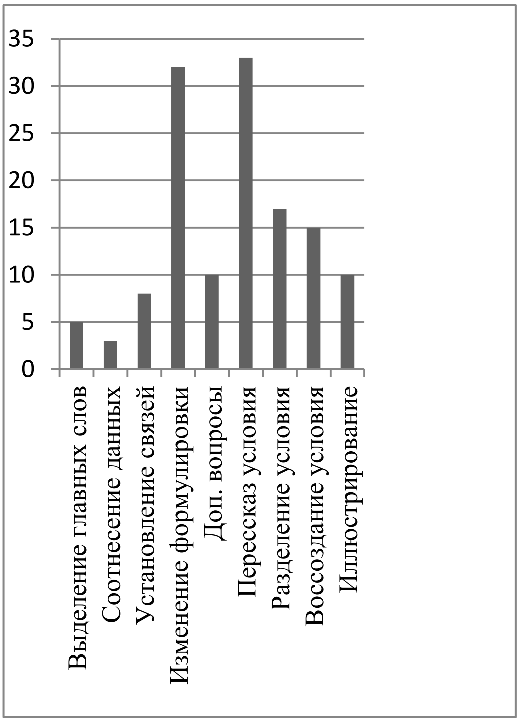


Рисунок 1.3. Результаты анкетирования учителей г. Волгограда

Далее учителям, участвующим в эксперименте, было предложено составить вопросы для анализа условия планиметрической задачи: «*Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 16, а высота, проведенная к боковой стороне – 4. Найти угол при основании*».

Учителями были составлены вопросы, которые можно разделить на две группы: вопросы поиска решения задачи и вопросы анализа условия задачи.

1. Как можно найти площадь треугольника? Что необходимо знать, чтобы найти угол при основании? Какие формулы площади треугольника вы знаете? Как найти основание? Какими способами можно вычислить угол? и др.

2. Что дано в условии? Какие элементы треугольника известны? Что требуется найти? Какой треугольник называется равнобедренным? Какие свойства равнобедренного треугольника вы знаете? Является ли высота, проведенная к боковой стороне биссектрисой, медианой? Чему равна сумма углов треугольника? Что такое высота треугольника и как ее построить? Достаточно ли данных для решения задачи?

Среди вопросов второй группы первые три относятся к ориентировочному анализу, следующие пять вопросов – это вопросы, раскрывающие сущность объектов. Последний вопрос направлен на выяснение полноты условия задачи, при этом ответить на данный вопрос нельзя без предварительного анализа условия, который был не выполнен.

При составлении вопросов анализа условия задачи только 11 учителей использовали чертеж.

Чаще респонденты не разграничивают вопросы для анализа условия задачи и вопросы для поиска ее решения.

К тому же особенность данной задачи заключалась в том, что она является вариативной. И вопросы анализа в первую очередь должны быть направлены на установление вариативного элемента – вида треугольника (остроугольный или тупоугольный) и, в соответствии с этим, расположения высоты. Из 50 опрошенных только четыре респондента составили соответствующие вопросы: где будет располагаться высота (внутри или вне треугольника)? Высота будет опущена на сторону или на ее продолжение?

Семь респондентов вообще не смогли составить вопросы для анализа условия данной задачи.

Вывод: учителя используют незначительное количество (3) приемов анализа условия планиметрической задачи.

Таким образом, *констатирующий эксперимент* позволил выявить трудности решения планиметрической задачи, большая часть которых связана с неумением находить связи между компонентами задачи, строить чертеж, соответствующий условию задачи. Количество используемых учителями приемов организации деятельности учащихся на первом этапе решения планиметрической задачи является недостаточным для полноценного анализа условия и выбора стратегии её решения.

1.2. Умение анализировать условие планиметрической задачи: структурная, уровневая и этапная модели

Построение структурной, уровневой и этапной моделей умения анализировать условие планиметрической задачи учащимися основной школы – цель данного параграфа исследования.

В педагогической литературе по-разному раскрывается сущность понятия «умение». Так, Е.И. Бойко определяет умение через готовность к практическим действиям, выполняемым сознательно на основе приобретённых знаний.

А.Н. Леонтьев [106] и А.А. Смирнов [144] считают, что умения – это способы выполнения действий, совершающиеся на основе полученных знаний и требующие полного осознания всех выполняемых операций, входящих в состав действия.

В.В. Давыдов определяет умение как этап овладения новым способом действия, основанным на каком-либо знании и на его правильном использовании в процессе решения определённого класса задач, но ещё не достигшего уровня навыка [49].

Т.А. Ильина под умением понимает практическое действие, совершаемое учеником на основе полученных знаний [84]. Исследователь подчеркивает, что умение – это практическое действие, которое ученик может совершить тогда, когда требуется. Сформированные умения способствуют в дальнейшем получению новых знаний и формированию новых умений.

Умения можно классифицировать на простые и сложные. Простые умения связывают с действиями, совершаемыми на основе конкретных знаний. Сложные умения или умения более высокого порядка подразумевают выполнение действий, включающих целые системы знаний, простых умений [84].

Сформированность сложных умений определяется овладением определенными приемами работы, например, такими как прием сопоставления модели с её чертежом, прием чтения графиков и т.п. Поэтому в своем исследовании будем пользоваться определением Л.В. Занкова: умение – это владение определенными приемами работы и, следовательно, соответствующими приемами умственной деятельности [70].

Анализ научно-методической литературы [8, 42, 45, 97, 133] по проблеме исследования показал, что методисты рассматривают разные действия на этапе понимания условия задачи. Можно предположить, что умение анализировать условие задачи является многокомпонентным, поэтому появляется необходимость разработки его структуры.

Умение анализировать условие задачи состоит из комплекса различных умений, которые разделим на группы:

- умения, позволяющие получить информацию из условия задачи без его непосредственного изменения, – будем называть такие умения статическими;
- умения, позволяющие получить информацию из условия задачи при его изменении (варьировании), – преобразующие умения;
- умения, связанные с чертежом, – графические умения.

Статическими умениями при анализе условия геометрических задач по планиметрии будем считать следующие умения:

1. Умение выявлять существенное (известные, неизвестные, искомые). Формирование этого умения является основным для анализа условия задачи. Учащиеся должны четко видеть данные задач, уметь различать неизвестные величины (величины, которые не заданы условием, но нужны для решения) и искомые (величины, которые требуется найти по условию). Для этого анализ условия нужно начинать с вопросов: «О какой фигуре идет речь в задаче?», «Какие её элементы известны?», «Как известные элементы связаны между собой?», «Что требуется

найти?», «Связаны ли данные элементы и искомые?», «Какие элементы не известны?».

2. Умение соотносить неизвестные элементы задачи с известными элементами.

3. Умение распознавать известные элементы в различных сочетаниях. Например, в треугольнике *ABC* *CK* является высотой, с другой стороны, *CK* является катетом прямоугольного треугольника *ACK* и *CKB* (рис. 1.4).

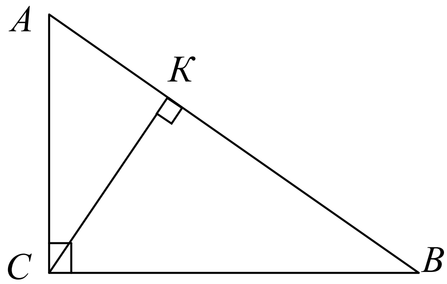


Рисунок 1.4. Чертеж к задаче (п. 3)

4. Умение сопоставлять задачу с известными задачами. Например, для нахождения медиан равностороннего треугольника, можно использовать формулу нахождения высоты равностороннего треугольника. Данное умение предполагает умение действовать по аналогии. Ученикам можно предложить по аналогии с образцом отделить условие, заключение в предложенной задаче, сравнить данную задачу с типовыми, составить краткую запись, схожую по форме с краткой записью разобранной задачи.

5. Умение перевести ситуацию на язык математики. Чаще всего данное умение необходимо в задачах «с практическим содержанием». В школьных учебниках задачи такого вида встречаются мало и на уроках решаются редко, поэтому ученики испытывают огромные затруднения при анализе условия таких задач.
Условие: «*В 24 метрах одна от другой растут две сосны. Одна из которых 23 метра, а другая – 16*

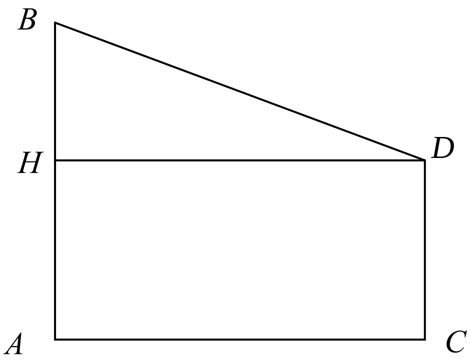


Рисунок 1.5. Чертеж к задаче (п. 5)

метров. Найдите расстояние (в метрах) между их верхушками». Исходные данные: Высоты деревьев – 23 м и 16 м, расстояние между их основаниями – 24 м. Найти: Расстояние между верхушками сосен. Дано: $AB = 23$ *м*, $CD = 16$ *м*, $AC = 24$ *м*. Найти: BD (рис. 1.5).

Данное умение предполагает в том числе и перевод условия задачи на язык какой-либо математической теории. Например, требуется доказать теорему Пифагора. Сделать это можно координатным методом.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник, угол A – прямой. Точку A примем за начало координат. Луч AC примем за положительную полуось абсцисс и луч AB примем за положительную полуось ординат (рис. 1.6). Координаты вершин треугольника будут следующими: $A(0,0)$, $C(X_1,0)$, $B(0, Y_1)$. Найдем квадраты длин сторон: $AB^2 = Y_1^2$, $AC^2 = X_1^2$, $BC^2 = Y_1^2 + X_1^2$. Видим, что $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Теорема доказана.

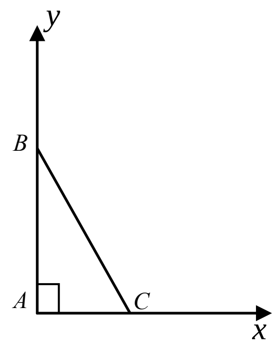


Рисунок 1.6 Чертеж в системе координат

6. Умение актуализировать те знания, которые необходимы для решения задачи. Задача: «*В треугольнике ABC катет $AB = 9$, катет $BC = 12$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника*». Актуализация: где расположен центр окружности, описанной около остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников?

Преобразующими умениями при анализе условия геометрических задач по планиметрии будем считать следующие умения:

1. Умение преобразовывать требование задачи в равносильное ему. От сформированности данного умения зависит не только успешный анализ условия, но и последующий ход всего решения задачи. «*В окружности хорды AB и CD пересекаются в точке O. Доказать, что $AO \cdot OB = CO \cdot OD$*». Переформулируем требование: доказать, что $\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$.

2. Умение преобразовывать условие задачи в равносильное ему. «*Дано: M – середина отрезка AB. Найдите AM, если AB = 10*». Переформулируем условие: $AB = 2BM$, $AM = MB$, $AM = \frac{1}{2}AB$.

3. Умение устанавливать полноту условий (достаточность или избыточность данных). Данное умение сложно формируемое. Сформировать его возможно только в результате длительного, систематического решения нестандартизированых задач (неопределенных, переопределенных). Г.И. Ковалева, Н.А. Астахова, Т.Ю. Дюмина дают следующие определения таких задач. Неопределенные задачи – задачи с неполным условием, в котором для получения конкретного ответа не хватает одной или нескольких величин, или каких-то указаний на свойства объекта, или его связи с другими объектами [93].

Пример: «*В треугольнике одна сторона имеет длину 5 см, а другая 8 см. Найти длину третьей стороны*». Критерием определенности геометрической задачи может быть условие определенности геометрической фигуры. Например, n – угольник определен своими ($2n$–3) независимыми элементами. (Сколько нужно знать независимых элементов, чтобы определить треугольник, четырехугольник, пятиугольник? Три, пять и семь независимых элементов, соответственно.) Таким образом, количество данных элементов в задаче поможет сразу сделать предположение о степени ее определенности. Далее обязательно следует проверить независимость данных элементов. Переопределенные задачи – задачи, в которых имеются лишние данные, ненужные для решения. Данные в таких задачах могут быть противоречивыми, и выявление этой противоречивости или непротиворечивости является обязательным элементом анализа условия задачи. Важно научить учащихся находить нужные данные в условии задачи и отбрасывать ненужные. Особым видом таких задач являются противоречивые задачи. Решить такую задачу – значит найти противоречивость в условии [93]. Например, прочитав текст задачи:

«Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см, а высота, проведенная к гипотенузе, – 2см. Найдите отрезки, на которые делит высота гипотенузу», – не стоит сразу приступать к вычислению, ведь такого треугольника не существует.

4. Умение выявлять скрытые свойства задачной ситуации. Данное умение формируется при решении вариативных задач. Под вариативной понимают задачу, у которой формулировка не допускает точного установления взаимного расположения объектов условия или требования [93].

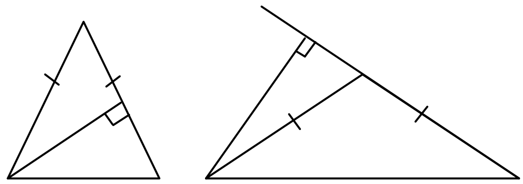


Рисунок 1.7. Чертеж вариативной задачи

В задаче: «*Площадь равнобедренного треугольника равна 16, а высота, опущенная на боковую сторону равна 4. Найдите угол при основании*», – результат решения будет зависеть от вида исходного треугольника (рис. 1.7).

5. Умение создавать новые комбинации известных понятий и фактов, относящихся к элементам данной задачи. Например, *AP* – высота треугольника *ABC,* значит, прямые *AP* и *BC* перпендикулярны; в треугольнике известны сторона и противолежащий ей угол, значит, можно найти радиус описанной окружности; в треугольнике проведены две медианы, значит, отрезок, соединяющий основания медиан, является средней линией.

6. Умение осуществлять мысленный эксперимент, предвидеть его промежуточные и конечный результаты. Для формирования данного умения полезно решать задачи на воображение, представление. Например, мысленно сверните прямоугольник пополам, сверните ещё раз пополам так, чтобы линия первоначального сгиба совпала. Отрежьте треугольник, две стороны которого являются линиями сгиба. Разверните. Какая фигура получилась? (Ромб.) Или представьте две точки плоскости. Мысленно отметьте точку, равноудаленную от данных? И еще одну. Где будет находиться множество точек, равноудаленных от данных?

7. Умение составлять обратные задачи. Для формирования этого умения необходимо учить школьников формулировать встречающиеся утверждения в виде «если ..., то». Утверждение: «*В равнобедренном треугольнике углы при основании равны*». Переформулированное утверждение: «*Если треугольник равнобедренный, то в нем углы при основании равны*». Если задача содержит много условий, то обратную задачу можно строить по-разному: взять в качестве заключения обратной задаче все условия, накладываемые на объект в прямой задаче, а условием обратной задачи сделать только одно заключение прямой, или взять в качестве заключения обратной задачи только часть условий, накладываемых на объект в прямой задаче, а остальную часть условий прямой задачи вместе с её заключением сделать условием обратной задачи. Например, прямая задача: «*Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN – равнобедренный*». Обратная задача: «*Из вершины угла A проведен луч, перпендикуляр к этому лучу пересекает стороны угла в точках M и N, треугольник AMN – равнобедренный, докажите, что луч является биссектрисой угла A*». Или: «*Прямая пересекает стороны угла A в точках M и N, причем треугольник AMN – равнобедренный. Докажите, что прямая MN перпендикулярна биссектрисе угла A*».

В особую группу, выделим ***умения, связанные с правильностью построения чертежа, соответствующего условию геометрической задачи.***

Под чертежом будем понимать изображение предмета, выполненное по определенным правилам с помощью чертежных инструментов [18]. Построение чертежа неразрывно связанно с анализом условия задачи: хороший анализ условия дает правильные связи на чертеже, и наоборот, хорошо исследованный чертеж дает успешный анализ условия задачи.

Я.Е. Гольдберг указывает, что чертеж «позволяет охватить, причем в наглядной форме, все условие целиком, без него трудно, а в ряде случаев и невозможно усвоить условие задачи и решить ее» [36]. В.А. Далингер предлагает с помощью геометрического чертежа варьировать существенные и несущественные признаки и отойти от «стандартного» чертежа, который вызывает у учащегося неправильные «житейские» ассоциации, ведущие к некоторым противоречиям с геометрическими знаниями [56]. Многие авторы (А.К. Артемов, Г.А. Владимирский, С.В. Гуревич, А.Т. Зверева, И.Ф. Протасов, Г.И. Саранцев, Е.В. Силаев и др.) указывали на то, что использование чертежа в процессе решения предполагает умение находить те соотношения между элементами чертежа, которые нужны для ответа на данный вопрос, умение видеть нужный образ и выделять его из разнообразных сочетаний с другими геометрическими фигурами, умение устанавливать зависимость между элементами фигуры, умение видеть геометрические объекты умственным взором и мысленно преобразовывать фигуру.

Под ***графическим умением*** будем понимать овладение графическими приемами работы, то есть умение строить изображение геометрической фигуры и выполнять чертежные операции на этих изображениях [98]. ***Графическое умение*** включает в себя следующие умения:

1. Умение конструировать простейшие математические модели данной задачной ситуации. Под данным умением, будем понимать умение строить графическую интерпретацию задачи (чертеж) с использованием определенной символики.

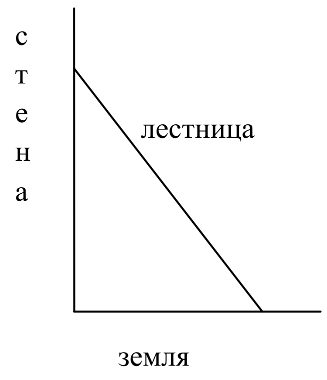


Рисунок 1.8. Чертеж к задаче п.1

Задача: «*Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние от ее нижнего конца до стены равно 3,5 м. На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы*?». (Рис. 1.8)

2. Умение отождествлять элементы задачи с элементами модели.

3. Умение выделять на чертеже условие задачи. Данное умение подразумевает обязательное выделение на чертеже равных элементов:

равные стороны выделять штрихами, равные углы – одинаковыми дугами (рисунок 1.9).

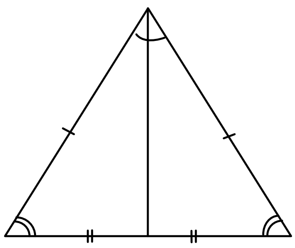


Рисунок 1.9. Соблюдение условных обозначений п.3

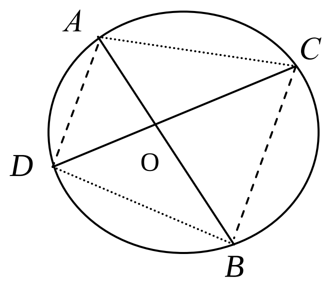


Рисунок 1.10. Дополнительные построения п.4

4. Умение преобразовывать чертеж. Данное умение включает в себя умение не только изображать фигуру в нужном ракурсе, но и проводить дополнительные построения. Задача: «*В окружности хорды AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $AO \cdot OB = CO \cdot OD$*».

Изобразить на чертеже нужно не только окружность, хорды *AB* и *CD*, но и хорды *AC* и *BD* (*AD*, *BC*) (рис. 1.10).

Е.В. Силаев выделяет три типа связей между фигурами при дополнительных построениях: 1) связь между фигурой и ее элементами, 2) связи в дополнительно построенной фигуре (в том числе связи первого типа между элементами вновь построенной фигуры), 3) связи сравнения дополнительных фигур с другими фигурами [139].

Схематически структура умения анализировать условие планиметрической задачи представлена на рисунке 1.11.

Рисунок 1.11 Структура умения анализировать условие задачи

Процесс формирования умения анализировать условие планиметрических задач имеет свою логику, этапы и уровни. Мы представляем процесс движения формируемого умения от одного уровня, менее совершенного, к другому – более совершенному. В связи с этим необходимо иметь четкие представления об уровнях сформированности умения анализировать условие планиметрических задач.

Под уровнем сформированности какого-либо умения будем понимать количественный и качественный состав и характер взаимодействия основных сформированных показателей, достаточно устойчивых и типичных для данного умения. Для выявления сформированности показателей необходимо выделить критерий – признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо.

В психолого-педагогической литературе существуют различные подходы к определению критериев и показателей эффективности и качества результатов учебного процесса. В работах О.А. Абдуллиной, В.А. Беликова, В.П. Беспалько, П.Я. Гальперина, В.А. Сластенина, Н.Ф. Талызиной, А.В. Усовой, Н.М. Яковлево и других ученых предложены различные критерии и показатели сформированности компонентов деятельности. В теории и практике имеются общие требования к выделению и обоснованию критериев, которые сводятся к тому, что они, во-первых, должны отражать основные характеристики, во-вторых, способствовать установлению связей между всеми компонентами исследуемой проблемы, в-третьих, качественные показатели должны выступать в единстве с количественными [68]. В своей работе мы будем придерживаться следующих определений показателя и критерия:

Показатель – является реальным проявлением критерия оценки качества педагогического процесса. Это конкретные данные, по которым можно судить о развитии педагогического процесса.

Критерий – мерило оценки отдельных компонентов или целостного педагогического процесса. Критериями характеризуется сущность, основные признаки, особенности и структура педагогического процесса [70].

Таким образом, критерий как общая характеристика педагогического явления или объекта может иметь несколько или даже много показателей.

Выделение структурных компонентов умения анализировать условие планиметрической задачи дало возможность оценить его с помощью показателей (табл. 1.4), выявленных в ходе теоретического анализа.

Таблица 1.4

Показатели и критерии умения анализировать условие планиметрической задачи

Компонент	**Критерий**	**Показатель**
Статический	Эффективность применения статических умений при анализе условия задачи	Совокупность знаний о структуре задачи
Преобразующий	Эффективность применения преобразующих умений при анализе условия задачи	Полнота учета конкретных условий задачной ситуации
Графический	Эффективность применения графических умений при анализе условия задачи	Совокупность навыков построения чертежа, отвечающего условию задачи

Данные показатели предназначены для определения уровней сформированности у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи. Возможные варианты комбинаций показателей представлены в таблице 1.5, где $\overline{p_i}$ – несформированный показатель.

Таблица 1.5

Возможные варианты комбинаций показателей умения анализировать условие планиметрической задачи

Уровень	**Количество сформированных показателей**	**Возможные комбинации показателей**
Исходный	Ни одного	$(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3})$
Первый	Один	$(p_1, \overline{p_2}, \overline{p_3})$; $(\overline{p_1}, p_2, \overline{p_3})$; $(\overline{p_1}, \overline{p_2}, p_3)$
Второй	Два	$(p_1, p_2, \overline{p_3})$; $(p_1, \overline{p_2}, p_3)$; $(\overline{p_1}, p_2, p_3)$
Третий	Все	(p_1, p_2, p_3)

Комбинации $(\overline{p_1}, p_2, \overline{p_3})$, $(\overline{p_1}, \overline{p_2}, p_3)$, $(\overline{p_1}, p_2, p_3)$ можно отбросить, так как без знаний о структуре задачи и начальных навыков анализа условия задачи вряд ли можно овладеть полноценным умением анализировать условие планиметрической задачи. Следовательно, уровни умения анализировать условие планиметрической задачи определяются следующим набором показателей (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Уровни умения анализировать условие планиметрической задачи

Уровень	Возможные комбинации показателей
Исходный	$(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3})$
Первый	$(p_1, \overline{p_2}, \overline{p_3})$
Второй	$(p_1, p_2, \overline{p_3})$; $(p_1, \overline{p_2}, p_3)$
Третий	(p_1, p_2, p_3)

Исходный уровень характеризуется неполными знаниями о структуре задач, об этапе анализа условия задач, о методах и приемах анализа условия планиметрических задач, а также низким уровнем навыков анализа условия планиметрических задач и неумением создавать графическую интерпретацию условия планиметрических задач.

Первый уровень определяется полными знаниями о структуре задачи и об этапе анализа условия планиметрических задач, о методах и приемах анализа условия планиметрических задач, но низким уровнем знаний о требованиях к построению чертежа, несовершенным навыком построения чертежа и несовершенными навыками анализа условия: напряженностью при выполнении действий анализа условия, постоянной помощью со стороны учителя, низким темпом работы, неумением выделять ключевые слова в условии.

Второй уровень: для 1-го типа характерны полнота знаний о структуре задачи и об этапе анализа условия при решении задачи, о методах и приемах анализа условия задачи, быстрое умение выявлять существенное, соотносить неизвестные элементы задачи с известными, а также сформированность навыков построения чертежа, но неумение преобразовывать чертеж при изменении условия; для 2-го типа характерно обладание знаниями о структуре задачи и об этапе анализа условия задачи, о методах и приемах анализа условия задачи, о правилах построения чертежа к задаче, кроме того, для этого типа свойственно хорошо развитое умение выделять условие задачи на чертеже и преобразовывать его, при этом не развито умение устанавливать полноту (избыточность) условия задачи и преобразовывать его.

Третий уровень определяется совокупностью знаний о методах и приемах анализа условия планиметрических задач, совершенным умением строить чертеж, соответствующий условию задачи, умением изменять условие в соответствии с поставленными целями, умением с легкостью выделять ключевые моменты условия, устанавливать полноту (избыточность) условия, учитывать все данные задачной ситуации.

Диагностика **статистического компонента** умения анализировать условие планиметрической задачи

Задача 1: *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC = 24, а высота CH, опущенная на гипотенузу, равна* $6\sqrt{15}$. *Найдите* sin ABC.

1. О какой фигуре идет речь?
2. Какой обязательный элемент должен присутствовать, чтобы треугольник был прямоугольным?
3. Какие величины известны в задаче?
4. Элементами каких фигур является отрезок *BC*?
5. Элементами каких фигур является отрезок *CH*?
6. Что требуется найти?
7. Что необходимо знать, чтобы найти синус угла?

Задача 2: *В треугольнике ABC AB = BC = 75, AC = 120. Найдите длину медианы BM.*

1. О какой фигуре идет речь?
2. Какое условие должно выполняться, чтобы треугольник был равнобедренным?
3. Какие величины известны в задаче?

4. Элементом каких фигур является отрезок *BM*?
5. Что требуется найти?
6. Что можно сказать про отрезки *AM* и *MC*?
7. Свойство медианы в равнобедренном треугольнике?

Ключ к диагностике

Задача 1.

1. прямоугольный треугольник – 1б, другие варианты – 0 б.
2. есть угол 90°– 1б, другие варианты – 0 б.
3. $AC = 24$, $CH = 6\sqrt{15}$ – 1 б, другие варианты – 0 б.
4. *BC* – катет треугольника *ABC* и гипотенуза треугольника *BCH*; полный ответ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.
5. *CH* – высота треугольника *ABC* и катет в треугольниках *BCH* и *CHA*; полный ответ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.
6. $\sin \mathrm{ABC}$ – 1 б, другие варианты – 0 б.
7. отношение противолежащего катета к прилежащему – 1б, другие варианты – 0 б.

Задача 2.

1. равнобедренный треугольник – 1 б, другие варианты – 0 б.
2. боковые стороны равны – 1 б, другие варианты – 0 б.
3. *AB = BC =75, AC = 120* – 1 б, другие варианты – 0 б.
4. *BM* – катет в треугольниках *ABM* и *BMC*, а также медиана треугольника *ABC*; полный ответ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.
5. медиану *BM* – 1 б, другие варианты – 0 б.
6. отрезки *AM* и *MC* – равны; верный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.
7. медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой и высотой; полный ответ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

Максимальное кол-во баллов – 18.

От 15 – 18 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи сформирован.

От 10 –14 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи сформирован неполностью или находится на стадии формирования.

От 0 – 9 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи не сформирован.

Диагностика **преобразующего компонента** умения анализировать условие планиметрической задачи

1. Выполните задание из таблицы 1.7

Таблица 1.7

Найдите и сопоставьте одинаковые (равносильные) задачи из левого и правого столбца

a. M – середина отрезка AB. Найдите MB, если $AB = 10$.	1. На отрезке AB = 10 взята точка M, так что $AM = \frac{1}{2}$AB. Найдите MB. 2. На отрезке $AB = 10$ взята точка M, так что $AB = \frac{1}{2}$AM. Найдите MB. 3. На отрезке $AB = 10$ взята точка M, так что $AM = 2$AB. Найдите MB.
b. В треугольнике ABC BD – биссектриса, угол A равен 70°, угол BAD равен 40°, найдите угол C.	1. В треугольнике ABC проведен отрезок BD, причем угол ABD равен углу ADB и равен 40°, угол A равен 70°. Найдите угол C. 2. В треугольнике ABC BD – биссектриса, угол A равен 70°, угол ADB равен 40°, найдите угол C. 3. В треугольнике ABC проведен

	отрезок BD, причем угол ABD равен углу DBC и равен 40°, угол A равен 70°. Найдите угол C.
c. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 40 см, а основание 10 см. Найдите боковые стороны.	1. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 40 см, $AB = AC$, $AC = 10$ *см*. Найдите BC. 2. Периметр треугольника BAC равен 40 см, $AB = BC$, $AC = 10$ см. Найдите AB и BC. 3. Периметр треугольника BAC равен 40 см, $AB = BC = 10$. Найдите AC.

2. Дополните условие задачи так, чтобы она решалась в одно действие:

а. Найдите площадь параллелограмма, основание которого равно 5 см, а _______ равна 2 см.

б. Найдите высоту треугольника, если его основание равно 10 см, а _________ равна 30 см^2.

в. Найдите __________ трапеции, если высота равна 5, а площадь 60.

3. Сформулируйте утверждения, обратные данным:

а) *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны*.

b) *Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.*

4. Изобразите чертеж к условию задачи: *Площадь равнобедренного треугольника равна 16, а высота, опущенная на боковую сторону равна 4. Найдите угол при основании*.

Ключ к диагностике

1. За каждое правильное сопоставление 1 балл.

2. а) высота б) площадь в) средняя линия

За каждый правильный ответ 1 балл.

3. За каждое сформулированное утверждение – 1 балл.

4. Рассмотрены два случая расположения высоты – 2 балла, один случай – 1 балл.

Максимальное количество баллов – 10.

8-10 баллов – преобразующий компонент сформирован.

6-7 баллов – преобразующий сформирован частично или находится в стадии формирования.

0-5 баллов – преобразующий компонент не сформирован.

<u>Диагностика **графического компонента** умения анализировать условие планиметрической задачи</u>

1. Составьте условие задачи по чертежу (рис. 1.12):

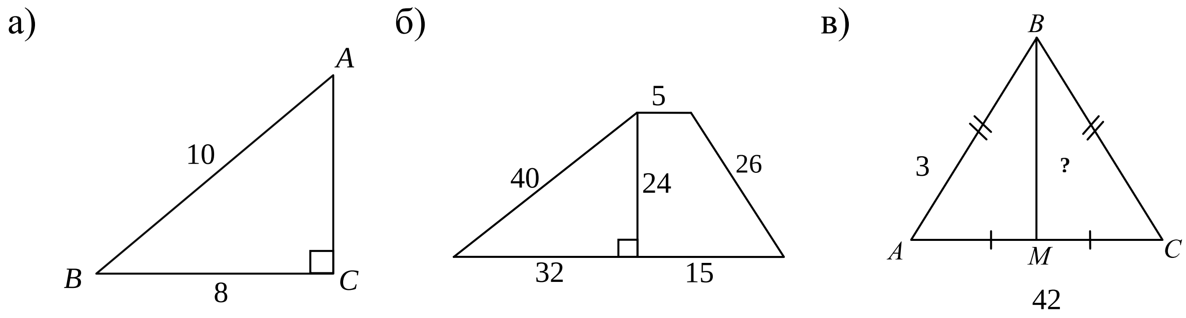


Рисунок 1.12. Составьте условие задачи по чертежу

2. Составьте чертеж по условию задачи:

a. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC = 24, а высота CH, опущенная на гипотенузу, равна $6\sqrt{15}$. Найдите sin ABC.

b. В треугольнике ABC $AB = BC = 75$, $AC = 120$. Найдите длину медианы BM.

c. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN – равнобедренный.

Ключ к диагностике

1. За каждое верно составленное условие – 1 балл.

Например,

а) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, $AB=10$, $BC=8$. Найдите площадь треугольника.

б) В трапеции высота, равная 24 см, делит большое основание на отрезки 32 см и 15 см, меньшее основание трапеции равно 5. Найдите площадь трапеции.

в) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 42, а боковая сторона – 35. Найдите длину медианы BM.

2. Правильность чертежа определяется 4 критериями, каждый критерий оценивается 1 баллом, таким образом, максимальное кол-во баллов за один чертеж – 4.

Критерии правильного построения чертежа:

– Чертеж отражает реальную фигуру, о которой идет речь в условии (то есть верно выполнено распознавание фигуры). (Если дан треугольник, то изображен треугольник, а не окружность.)
– Чертеж выполнен аккуратно с соблюдением масштаба, отвечающего реальному соотношению величин.
– Чертеж имеет четкие символические обозначения данных (равные отрезки отмечены равными штрихами, равные углы – равными дугами, перпендикулярные прямые – знаком перпендикуляра).
– На чертеже символьные обозначения данных, обозначения фигур и т.д. выполнены с соблюдением математической грамотности (точки обозначают заглавными буквами).

Максимальное количество баллов – 15.

12-15 баллов – графический компонент сформирован.

9-11 баллов – графический компонент сформирован частично или находится в стадии формирования.

0-8 баллов – графический компонент не сформирован.

Процесс формирования умения анализировать условие планиметрической задачи понимается нами как система целенаправленных воздействий, вызывающих качественнее изменения в тех или иных характеристиках умения. Формирование умения – не одномоментный, а многоступенчатый процесс. Это предполагает определение исходного уровня сформированности у школьников умения анализировать условие планиметрических задач, обоснование последовательности этапов формирования данного умения, определение динамики развития формируемого умения.

Формирование у школьников умения анализировать условие планиметрической задачи проходит ряд последовательных этапов. Связь развития обозначенных компонентов умения с определенным этапом условна. Анализ каждой задачи планиметрической задачи и построение чертежа в соответствии с условием задачи способствует формированию соответствующего умения в целом. Однако этапность формирования умения анализировать условие планиметрической задачи способствует более четкой организации обучения. Выделим три этапа процесса формирования умения анализировать условие планиметрической задачи.

1 этап. Цель – адаптировать умение анализировать условия алгебраических задач к анализу условий планиметрических задач. Проблема анализа условий алгебраических задач (например, текстовых задач по алгебре) подробно освещена методистами Ю.М. Колягиным [96], Л.С. Капкаевой [91] и др. Работа с текстом задачи знакома учащимся, поэтому сформированные умения необходимо применить к анализу условий планиметрических задач. Новым для учащихся являются следующие действия: определение фигуры, о которой идет речь, правильное её изображение, грамотное нанесение на чертеж данных задачи.

Основные средства формирования: разбор условия по образцу, пересказ условия свои словами, составление условия задачи по чертежу, изображение чертежа по условию, выделение ключевых слов в условии задачи.

Например, работа на составление условия задачи по чертежу может быть представлена в различных вариациях (рис.1.13-1.19)

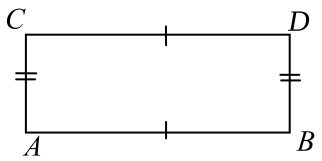


Рисунок 1.13. Определите фигуру

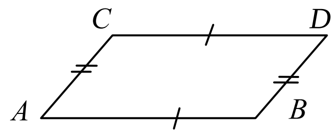


Рисунок 1.14. Определите фигуру

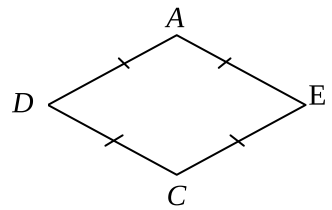


Рисунок 1.15. Определите фигуру

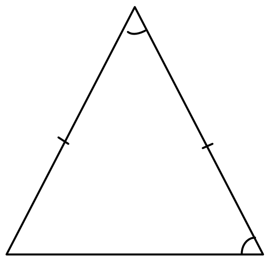


Рисунок 1.16. Определите фигуру или найдите ошибку

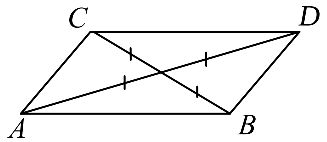


Рисунок 1.17. Определите фигуру или найдите ошибку

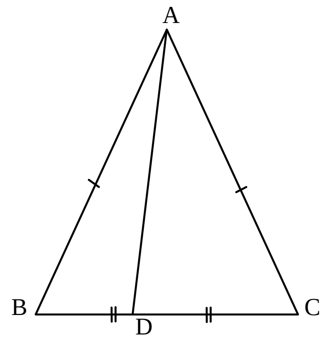


Рисунок 1.18. Найдите несоответствие условия и изображения

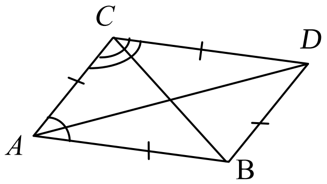


Рисунок 1.19. Определите фигуру или найдите ошибку

В одном случае основная идея – определить вид фигуры и составить условие задачи.

Например,

- ✓ *Дан прямоугольник ABCD. AB = 5, AC = 3. Найдите площадь прямоугольника (рис. 1.13).*
- ✓ *Дан параллелограмм ABCD, с острым углом 30°, AB = 5, AC = 3. Найдите площадь параллелограмма (рис. 1.14).*
- ✓ *Дан ромб ABCD, с острым углом 30° и стороной 5. Найдите площадь ромба (рис. 1.15).*

- ✓ *Дан равносторонний треугольник со стороной* $\sqrt{3}$. *Найдите его высоту (рис. 1.16).*

В другом случае перед конструированием задачи необходимо найти ошибку на чертеже.

- ✓ *Дан равнобедренный треугольник ABC, где AC = BC, угол B равен 50°. Найдите угол C. Или. Дан равнобедренный треугольник ABC, где AC = AB, угол B равен 50°. Найдите угол A (рис. 1.16).*
- ✓ *Дан параллелограмм ABCD, BC = 7, AD = 10, угол AFB равен 30°. Найдите площадь параллелограмма. Или. Дан прямоугольник ABCD. AB = 3, AC = 5. Найдите площадь прямоугольника (рис. 1.17).*

В третьем случае составлению условия задачи предшествует нахождение несоответствий между условием и изображением фигуры. В данном задании все условия на чертеже выделены верно, но чертеж не соответствует зрительному восприятию.

- ✓ *В треугольнике ABC отрезок CD является не только биссектрисой, медианой, но и высотой, так как треугольник ABC равнобедренный (рис. 1.18).*
- ✓ *Параллелограмм ABCD является ромбом, и его диагонали взаимно перпендикулярны, так как стороны равны и диагонали делят углы пополам (рис. 1.19).*

Для достижения целей первого этапа процесса формирования умения анализировать условие планиметрической задачи будем использовать задачи на готовых чертежах. Как правило, задачи на готовых чертежах, содержащиеся в сборниках и методических пособиях, направлены на отработку теоретических знаний конкретной темы. В методической литературе нет заданий на готовых чертежах, которые учат работать с самими чертежами: выделять фигуру и ее элементы, отмечать равные или отношение отрезков, читать чертеж. После анализа практического опыта преподавания автором диссертационного исследования были определены типы задач на готовых чертежах (к первым темам курса планиметрии), нацеленные на обучение учащихся анализу условия задач и, соответственно, построению чертежа: задачи на выделение объекта и записи его названия, задачи на комбинацию фигур, задачи на нетипичное расположение фигуры, задачи с недостающими данными, задачи без сформулированного вопроса.

2 этап. Цель – сформировать приемы анализа условия планиметрических задач.

Основные средства формирования: составление обратных задач, переформулирование требование задачи и ее условия в равносильное, изменение числовых величин, составление условия задачи по формуле, выделение одинакового математического содержания для разных задач.

Варьирование условия может быть направлено на уяснение сходства между фигурами с сохранением способа решения и на различие фигур с изменением решения. Рассмотрим варьирование условия заменой основной фигуры.

✓ *Диагонали параллелограмма (трапеции) равны 4 и 7 см соответственно, а угол между ними – 30°. Найдите площадь параллелограмма (трапеции).*

В данных задачах при замене фигуры решение не изменяется: площадь вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где $d_1, d_2 -$ диагонали фигуры, $\sin\varphi -$ угол между диагоналями.

✓ *Длина окружности, описанной около равнобедренного остроугольного (тупоугольного) треугольника, равна 20π. Найдите площадь треугольника, если основание равно 12.*

В данных задачах вид треугольника существенно изменяет весь ход решения.

Прием составления задач по формуле можно проводить как в простом, так и в усложненном виде. В упрощенной форме: учащиеся составляют различные условия задач, используя одну формулу; в усложненной форме –

более одной формулы. Пример заданий на составление условий задач по теме «Соотношения в прямоугольном треугольнике» по формуле $h^2 = a_c b_c$.

- ✓ *Высота делит гипотенузу на отрезки равные 10 см и 4 см. Найдите длину этой высоты.*
- ✓ *В прямоугольном треугольнике с катетами 9 и 12 высота делит гипотенузу на отрезки в отношении 2:3. Найдите длину этой высоты.*
- ✓ *Найдите высоту равнобедренного прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, которая равна 16 см.*

На данном этапе варьирование условия не должно касаться основного приёма решения. При варьировании условия путем изменения числовых величин нужно помнить об опасности получения противоречивой или нереальной задачи. Однако не стоит этого бояться, так как такие ситуации формируют у учащихся потребность более тщательного анализа условия задач. Например, учащимся предлагается найти площадь треугольника со сторонами 10, 15 и 20. После решения этой задачи дадим треугольник со сторонами 10, 15 и 30. Учащиеся должны понять, что решать такую задачу необязательно, так как такого треугольника не существует. Задача: «*Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольник со сторонами 5 и 3»,* – так же является нереальной, так как не выполняется условие, при котором в четырехугольник можно вписать окружность.

3 этап. Цель – сформировать умение анализировать условие нестандартизированных задач.

Основные средства формирования: постановка требования задачи по условию, составление условия с недостающими данными, составление условия из переполненного набора данных, переформулирование многовопросной задачи в вариативную и наоборот, решение провоцирующих задач, варьирование условия, влекущее изменение приема решения.

Начинать работу на данном этапе следует с введения переопределённых задач, предупреждая на первых порах учащихся о наличии избыточных данных и предлагая им найти такие данные, постепенно переходя к задачам, в которых избыточные данные не сразу бросаются в глаза. Например, задача: «*Найдите площадь прямоугольника, если одна сторона равна 6 см, диагональ – 10 см, а угол между диагоналями равен 30°*», – может быть переформулирована в стандартные задачи:

✓ *Найдите площадь прямоугольника, если одна сторона равна 6 см, а диагональ – 12 см.*

✓ *Найдите площадь прямоугольника, если диагональ равна 12 см, а угол между диагоналями – 60°.*

✓ *Найдите площадь прямоугольника, если одна сторона равна 6 см, а угол между диагоналями – 60°.*

Последняя задача – вариативная: сторона, равная 6 см, может лежать против угла 60° или 120°.

Задача: «*Около равностороннего треугольника, высота которого равна $2\sqrt{3}$ см, а площадь – $4\sqrt{3}$ см², описана окружность. Найдите радиус этой окружности*», – может быть переформулирована:

- ✓ *Около равностороннего треугольника, высота которого равна $2\sqrt{3}$ см, описана окружность. Найдите радиус этой окружности.*
- ✓ *Около равностороннего треугольника, площадь которого равна $4\sqrt{3}$ см², описана окружность. Найдите радиус этой окружности.*

Когда учащиеся приобретут навыки анализа условия и решения переопределённых задач, можно перейти к введению таких задач уже без предупреждения о наличии избыточных данных, чередуя эти задачи с традиционными определёнными задачами. Таким образом, не зная, имеется ли в условии задачи лишнее данное или нет, но подозревая, что оно может быть, учащиеся к каждой задаче будут подходить критически, что вызовет большую, чем в традиционных условиях, необходимость внимательного анализа условия задачи.

Когда учащиеся научатся выявлять переопределенные задачи, можно включить в структуру урока неопределенные задачи, опять же вначале предупреждая учащихся о том, что в условии задачи некоторых данных не хватает, и предлагая им указать каких. Например: «*Найдите площадь ромба с высотой 12 см*». Данных в условии задачи недостаточно. Условие можно дополнить, например: *Высота ромба равна 12 см. Найдите его площадь, если известно, что*

- ✓ *его острый угол равен 30°;*
- ✓ *одна из диагоналей равна* $6\sqrt{5}$ *см;*
- ✓ *высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные 3 к 2, считая от вершины острого угла; и пр.*

Варьирование условия задачи на данном этапе имеет целью не столько закрепление в памяти учащихся того или иного типового приема, сколько выработку умения распознавать за различной внешней формой задачи ее логическую структуру (связи, взаимообусловленность элементов). Большое значение приобретает решение задач аналогичных по логической структуре, но изменённых по словесной формулировке. При этом изменение формулировки должно касаться той части условия, которая является определяющей для выбора приёма решения.

Выводы первой главы

1. Анализ условия планиметрической задачи – обработка конкретно заданной информации и выявление такой, которая непосредственно не задана условием, но присуща ему.
2. Основанием классификации приемов анализа условия планиметрической задачи послужил характер получаемой информации – явный (констатация данных, неизвестных и искомых) и неявный (установление связей между элементами задачи). Основным приемом установления связей между структурными элементами планиметрической задачи является

варьирование, при котором изменение одного элемента определяет следование или изменение другого. Варьирование заключается как в переформулировании задачи, так и в ее изменении (замена числовых данных, объектов и/или отношений, добавлении и/или изъятии условий, требований). При этом сконструированные задачи сравниваются с данной, что приводит к установлению связей между изменяемыми элементами задачи.

3. Статические (позволяющие получить информацию из условия задачи без его непосредственного изменения), преобразующие (позволяющие получить информацию из условия задачи при его изменении (варьировании)) и графические (связанные с графической интерпретацией задачи) умения являются компонентами структурной модели умения анализировать условие планиметрической задачи.
4. Совокупность знаний о структуре задачи, методах и приемах анализа условия планиметрических задач, полнота учета конкретных условий задачной ситуации и сформированность навыков построения чертежа, отвечающего условию задачи, определили четыре уровня сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи.
5. Модель формирования умения анализировать условие планиметрической задачи представлена тремя этапами, отличающимися целью и основными средствами формирования.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ АНАЛИЗУ УСЛОВИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

2.1. Разработка целевого, содержательного и процессуального блоков методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи

Теоретико-методологической основой методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи стали принципы проектирования методической системы работы учителя математики. (Н.В. Кузьмина, В.М. Монахов, Т.К. Смыковская и др.) Основываясь на них, под методикой обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрических задач будем понимать строго определенное педагогическое воздействие, направленное на обучение учащихся анализу условия планиметрических задач и проявляющееся при реализации целей и содержания курса планиметрии в 7–9-ых классах. Методика обучения построена в соответствии с этапной моделью формирования умения анализировать условие планиметрических задач и представлена целевым (иерархия целей), содержательным (системы задач в соответствии с этапами формирования умения анализировать условие планиметрической задачи**)** и процессуальным (методы и формы организации учебной деятельности учащихся основной школы на этапе анализа условия планиметрической задачи) блоками.

Целевой блок методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи представлен глобальной, этапными, фазовыми, оперативными и интегративными целями.

Глобальная цель – формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи – конкретизируется на каждом этапе формирования умения анализировать условие планиметрической задачи.

Таблица 2.1

Соответствие целей этапам формирования умения анализировать условие планиметрической задачи

Этапы	Цель
I	Научить применять умения анализировать условия алгебраических задач к анализу условия планиметрической задачи
II	Сформировать приемы анализа условия планиметрической задачи
III	Усовершенствовать умение анализировать условие планиметрической задачи

Для достижения целей необходимо включать задачи на формирование каждого компонента умения анализировать условие планиметрической задачи. Например, для формирования статического компонента можно использовать следующие задания:

- ✓ разбор условия по образцу;
- ✓ пересказ условия свои словами;
- ✓ составление условия задачи по чертежу;
- ✓ изображение чертежа по условию;
- ✓ выделение ключевых слов в условии задачи.

А для формирования преобразующего компонента – задачи, связанные с варьированием:

- ✓ составление обратных задач;
- ✓ переформулирование требования задачи и ее условия в равносильные;
- ✓ изменение числовых величин;
- ✓ варьирование требования;
- ✓ составление условия задачи по формуле;

- ✓ выделение одинакового математического содержания для разных задач.

Графический компонент формируется параллельно, так как каждое условие задачи отмечается на чертеже, решение каждой из задач, получаемой из данной, сопровождается чертежом.

Фазовые цели отражают динамику умения анализировать условие планиметрической задачи в рамках учебных тем.

Таблица 2.2

Примеры фазовых целей в рамках учебных тем

Тема	Дидактические цели	Цели обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи
Биссектриса, высота и медиана треугольника (7-й класс)	1) познакомить с понятиями перпендикуляра, медианы, биссектрисы и высоты треугольника; 2) научить распознавать в треугольнике медиану, биссектрису и высоту и применять эти понятия при решении задач; 3) сформировать умение строить медиану, биссектрису и высоту	1) сформировать умение конструировать простейшие математические модели данной задачной ситуации; 2) сформировать умение отождествлять элементы задачи с элементами модели: выделять на чертеже известные элементы, использовать символику (равные углы обозначать равными дугами, равные отрезки одинаковыми штрихами)
Площадь	1) вывести формулу	Продолжить формирование умений:

треугольника (8-й класс)	площади треугольника по стороне и высоте, проведенной к данной стороне; 2) конкретизировать формулу для нахождения площади равностороннего и прямоугольного треугольника	– распознавать известные элементы в различных сочетаниях; – сопоставлять данную задачу с известными задачами; – переосмысливать элементы фигуры с точки зрения другого понятия; – устанавливать полноту условий
Соотношение между сторонами и углами треугольника 9 класс	1) вывести формулу площади треугольника через две стороны и синус угла между ними; 2) доказать теоремы синусов и косинусов; 3) научить «решать» треугольник по трем определяющим его элементам	Продолжить формирование умений: – умение переосмысливать элементы фигуры с точки зрения другого понятия; – умение преобразовывать требование задачи в равносильное ему; – умение выявлять скрытые свойства задачной ситуации; – умение создавать новые комбинации известных понятий и фактов; – умение составлять обратные задачи

Оперативные цели достижимы при решении конкретной планиметрической задачи, в условиях диалога и пр.

Например, рассмотрим задачу: «*Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 10. Найдите площадь этого* *треугольника, если его основание равно 12*». Она вариативная (рис.2.1). Используем эту особенность для достижения целей: сформировать умение выявлять скрытые свойства задачной ситуации, сформировать графические умения – построение равнобедренного треугольника и окружности, описанной около него.

Учитель: Определите вид треугольника, о котором идет речь в задаче.

Ученик: Равнобедренный.

Учитель: Сформулируйте алгоритм построения равнобедренного треугольника.

Ученик формулирует алгоритм, одновременно выполняя построение в тетради на клетчатом листе: построим основание треугольника (AC), разделим этот отрезок пополам, через середину отрезка (точка M) построим к нему перпендикуляр, отметим на нем точку (B), соединим эту точку с концами основания.

Учитель: Как построить окружность, описанную около треугольника? Что для этого нужно знать?

Ученик: Где располагается центр окружности и чему равен её радиус.

Учитель: Где располагается центр окружности, описанной около треугольника?

Ученик: В точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника? Один перпендикуляр на чертеже уже построен.

Учитель: Выполняйте построение серединного перпендикуляра ко второй стороне треугольника. Центр описанной окружности – точка O – найден? Чему равен радиус?

Ученик: Длине отрезка, соединяющего центр окружности с любой вершиной треугольника.

Обязательное условие: учащиеся выполняют построения в тетради самостоятельно, а образца построения на доске нет.

Учитель: Проанализируем, какие чертежи получились? У большинства учащихся центр окружности лежит внутри треугольника, у Кати М. центр окружности лежит вне треугольника. Катя неправильно построила чертеж? При каком условии центр описанной окружности лежит вне треугольника, внутри треугольника?

Ученик: Вне треугольника, если треугольник тупоугольный. Внутри, если треугольник остроугольный.

Учитель: А что сказано в условии задачи? Ученик: Ничего.

Учитель: Значит, и чертеж Кати удовлетворяет условию задачи. Какого случая тогда не хватает, чтобы класс равнобедренных треугольников был полностью рассмотрен.

Ученик: Равнобедренного прямоугольного треугольника.

Учитель: То есть, если в условии задач не указана характеристика равнобедренного треугольника по его углам, необходимо рассмотреть все возможные случаи (рис.2.1).

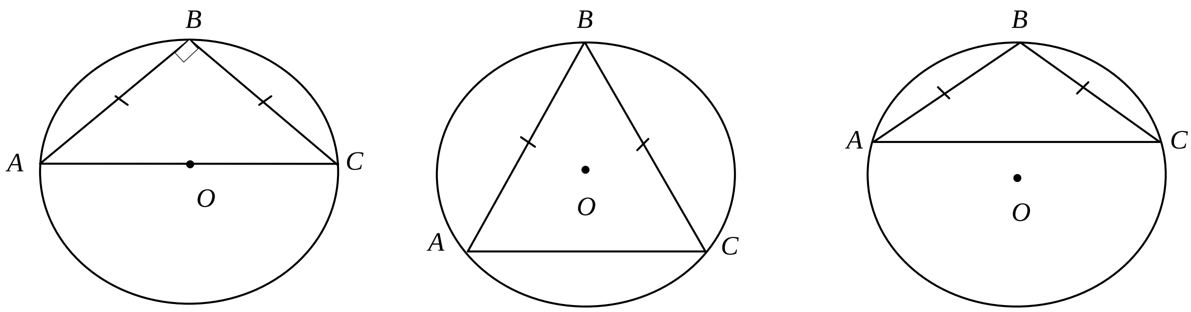


Рисунок 2.1. Варианты изображения чертежа

Учитель: Можно было выполнить один чертеж? Ученик: Да. Вершина B по разные стороны от AC (рис.2.2).

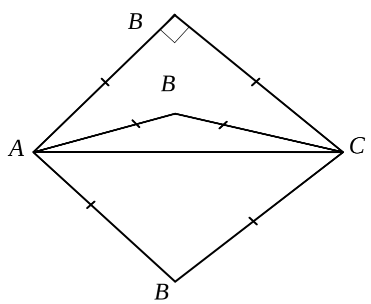


Рисунок 2.2. Вариант чертежа

Интегративная цель ориентирована на формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие любых задач на основе умения анализировать условие планиметрической задачи.

Содержательный блок представлен системами задач в соответствии с компонентной структурой формирования умения анализировать условие планиметрической задачи.

Понятие «задача» уже было рассмотрено в первом параграфе первой главы. Однако, прежде чем перейти к системе задач, необходимо указать на различие в трактовке задачи и вопроса. Некоторые психологи отождествляют эти два понятия, по мнению Ю.М. Колягина, это неправомерно. Действительно, в определенном смысле всякую задачу можно заменить определенным вопросом. Однако не всякий вопрос является задачей. Вопрос выступает лишь как некоторое указание к действию (решению задачи), являясь свойством сопутствующим задаче (или одним из ее компонентов). Математический вопрос не предполагает решения, ответ на него заключается в простом воспроизведении одного какого-либо результата, теоремы или определения из пройденного курса. Поэтому содержательный блок описываемой методики исключает только вопросы и представлен системой задач.

Ю.М. Колягин [96] считает, что возможности задач лучше реализовывать в учебном процессе, если задачи представлены в методически обоснованной системе. Г.И. Саранцев [132] отмечает, что умственная деятельность учащихся при решении задач обусловлена не только их содержанием, но и последовательностью их решения, количеством задач, комбинаций их с другими задачами. П.М. Эрдниев [176] указывает, что одним из важнейших условий повышения качества обучения математике является решение вопроса о системе упражнений, их количестве, разнообразии и последовательности, методике работы с ними. Г.В. Дорофеев [63] выделяет проблему создания взаимосвязанных циклов задач различного назначения, говоря о её сложности как в теоретическом, так и в практическом плане.

С.П. Шоленкова [174] определяет понятие «система задач» как совокупность взаимосвязанных задач, на которой реализованы какие-либо педагогические отношения с определенными свойствами воздействия на внешнюю или внутреннюю деятельность учащегося.

Психологи, педагоги и методисты доказывают, что задача, решаемая в отрыве от других задач, не дает желаемого результата, не позволяет добиваться общей цели.

Анализ методической литературы показывает, что для полного понимания системы задач необходим ряд условий, которые будут более полно и точно отражать ее сущность, являясь дополнением к сформулированному определению.

Г.И. Ковалева [94] и Т.Ю. Дюмина [64] под системой задач понимают совокупность упорядоченных и подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводит к заранее намеченному результату, и выделяют требования к содержанию и структуре системы задач.

Требования к содержанию следующие:

- адекватность содержания образования (типичность задач системы для изучаемой темы, соответствие задач программному материалу);

- полнота (наличие задач на все изучаемые понятия и факты, обеспечение системой реализации как общих, так и конкретных целей обучения).

Требования к структуре системы задач:

- целевая достаточность (наличие задач и для тренинга, и для самостоятельного решения);

- нарастание сложности (первая задача системы является элементарной, а каждая последующая задача сложнее предыдущей);

- рациональность объема (оптимальное количество задач для усвоения материала всеми учащимися класса и поддержки интереса на протяжении всего времени решения системы);

- возможность осуществления индивидуального подхода (система задач должна иметь открытую структуру, тогда изменение количества задач, их характера и последовательности расположения позволит добиться индивидуализации);

- иерархичность (система задач должна состоять из нескольких подсистем, которые в свою очередь обладают всеми признаками системы).

Перечисленные требования являются необходимыми условиями функционирования системы задач и должны быть учтены при ее конструировании.

Поясним, что система задач по формированию умения анализировать условие планиметрической задачи видоизменяется на разных этапах обучения.

В рамках поискового эксперимента определены задачи, без которых не может происходить формирование умения анализировать условие планиметрической задачи (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Состав компонентной системы задач

Статический компонент	**Преобразующий**	**Графический**
✓ задачи на осознание смысла слов, входящих в формулировку задачи; ✓ задачи на распознавание известных элементов в различных сочетаниях	✓ задача на преобразование формулировки в равносильное; ✓ обратные задачи; ✓ нестандартизированные задачи; ✓ задачи на отработку ключевой идеи (переосмысление элементов фигуры с точки зрения другого понятия)	✓ задачи на нахождение ошибки в чертеже; ✓ задачи на составление условия по чертежу; ✓ задачи на варьирование чертежа

Рассмотрим вариант системы задач на конкретном примере.

«*Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды,удаленные от центра на расстояние 6 см и 10 см. Найдите их длины*». (Рис.2.3.)

Система вопросов и задач

1. Вопросы и задачи для осознания смысла слов, входящих в формулировку задачи.
   - ✓ Какие из отрезков являются хордами окружности?
   - ✓ Какой из отрезков является расстоянием от точки до отрезка?
   - ✓ Сравните длину отрезка *ON, OB, OA.*
   - ✓ Какие отрезки являются радиусами?
   - ✓ Пересекаются ли взаимно перпендикулярные прямые? Под каким углом?

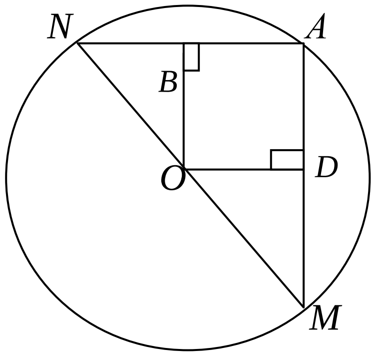


Рисунок 2.3. Чертеж к задаче

2. Выбрать элементы задачи, рассматриваемые в различных сочетаниях.
   - ✓ Элементами каких фигур являются отрезки *BO, OD*? (Расстояние от центра окружности до хорд; стороны прямоугольника; высота и медиана соответствующих треугольников, катеты соответствующих прямоугольных треугольников.)
   - ✓ Элементами каких фигур являются отрезки *NO, OM*? (Радиусы окружности; стороны соответствующих треугольников.)
   - ✓ Элементами каких фигур является отрезок *OA*? (Радиус окружности; сторона треугольника; диагональ прямоугольника.)
3. Переформулировать условие (данные/требование) задачи в равносильное. *Катеты прямоугольного треугольника удалены от центра описанной окружности на расстояние 6 и 10 см. Найдите их длины.*
4. Составить и решить обратную задачу.
   - ✓ *Две взаимно перпендикулярные хорды с длинами 20 см и 12 см проведены из одной точки окружности. Найдите расстояние от центра до этих хорд.*
   - ✓ *Две хорды с длинными 12 и 20 см пресекаются в точке А. Расстояние от центра окружности до хорд равно 10 и 6 см соответственно. Найдите угол между хордами.*

5. Составить и решить (если возможно) задачу нестандартизированную.

   Из одной точки окружности проведены две хорды, расположенные от центра на расстояние 6 см и 10 см. Найдите их длины.

   В данном случае задача не имеет решения, но она необходима для осознания важности угла между хордами.

6. Составить и решить задачу на отработку ключевой идеи (радиусы является сторонами равнобедренного треугольника).

   АМ – хорда окружности длиной 10 см. Найдите радиус, если расстояние от центра до хорды равно 4 см.

При решении задач необходимо выполнять чертеж, данные и искомые величины отмечать разными цветами, соблюдать символику (равные углы отмечать равными дугами, равные отрезки – равными штрихами).

7. Найти ошибку на чертеже (рис. 2.4).
8. Составить условие по чертежу (рис. 2.5).
9. Изобразить чертеж к данной задаче, изменив расположение точек, если возможно (рис 2.6).

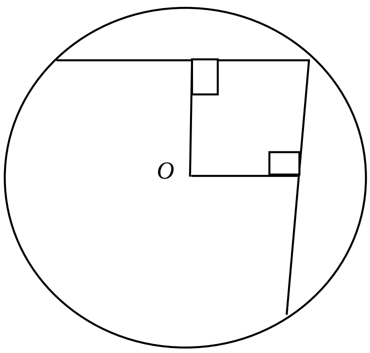


Рисунок 2.4. Найдите ошибку

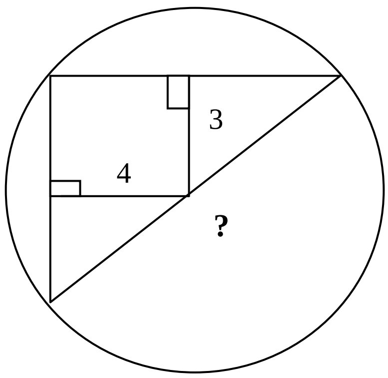


Рисунок 2.5. Составьте условие задачи

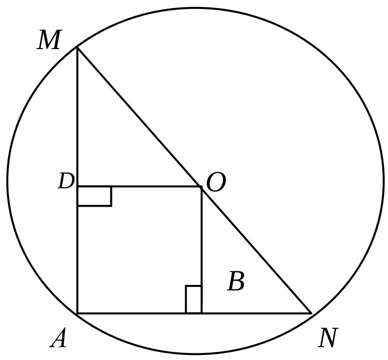


Рисунок 2.6. Один из вариантов чертежа

Вопросы и задачи 1 и 2 направлены на формирование статического компонента, 2–6 – на формирование преобразующего компонента, 7–9 – на формирование графического компонента умения анализировать условие планиметрической задачи.

Для того, чтобы полноценно сформировать умение анализировать условие планиметрической задачи, учитель должен не только сам составлять компонентной системы задач (КСЗ), но и приучать учащихся делать это самостоятельно. Работа с КСЗ может быть предоставлена учащимся в качестве домашней работы или самостоятельной в классе. На начальных этапах обучения и при решении «трудных» задач целесообразно составлять КСЗ непосредственно учителю. Оценивание работы учащихся с КСЗ остается на усмотрение учителя.

В зависимости от конкретных условий обучения не всегда нужно использовать полную КСЗ, а лишь ее части. Например, только задачи и вопросы, направленные на статический и графический компоненты, преобразующий и графический или каждый компонент в отдельности.

Учитель проектирует проблемно-поисковые ситуации с использованием КСЗ. С точки зрения педагогики *ситуация успеха* – это «целенаправленное, организованное сочетание условий, при которых создается возможность достичь значительных результатов в деятельности как отдельно взятой личности, так и коллектива в целом» (А.С. Белкин). КСЗ – это средство анализа условия планиметрической задачи, результатом использования которой является решение задачи (успех).

Различная последовательность реализации связей ведет к различным способам решения планиметрической задачи. Поэтому, чтобы поставить учащихся в *ситуацию выбора* (выбора стратегии решения задачи), на этапе анализа условия задачи необходимо выявить как можно больше связей между структурными элементами задачи. Приведем пример использования КСЗ для выявления различных связей между структурными элементами задачи.

Задача: «*Стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними – 60°. Найдите биссектрису, проведенную из вершины этого угла*». (Рис.2.7.)

Учитель: Назовите известные стороны треугольника. Ученик: *AB* и *BC*.

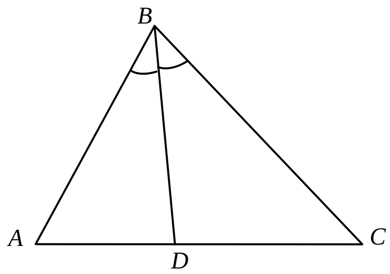


Рисунок 2.7. Чертеж к задаче

Учитель: Что требуется найти? Ученик: Биссектрису *BD*.

Учитель: Отметьте данное условие на чертеже. Ученики отмечают равенство углов *ABD* и *DBC*. Учитель: Почему углы равны? Ученик: По определению биссектрисы.

Учитель: Чему равна их градусная мера? Ученик: 30°.

Учитель: Элементами каких фигур является отрезок *BD?* Ученик: Биссектриса треугольника *ABC*, сторона в треугольниках *ABD* и *BDC*.

Учитель: Каким отношением связаны стороны *AB* и *BC* с отрезками *AD* и *DC*? Ученик: $\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{DA}$.

Учитель: Как отметить это на чертеже? Ученик: Например, $AD = x$, $DC = 2x$.

Учитель: Переформулируйте задачу, убрав слово «биссектриса» из условия задачи. Сформулируйте обратную задачу, аналогичную задачу.

Ученик: Например, *стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними – 60°. Из вершины этого угла проведен отрезок, делящий противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника. Найдите длину этого отрезка*.

Учитель: Можно ли однозначно определить вид исходного треугольника? Вид треугольников *ABD* и *DBC?* Ученик: Нет.

Учитель: Может ли треугольник *ABC* быть равнобедренным? Ученик: Нет. Учитель: Почему? Докажите.

Учитель: Могут ли треугольники *ABD* и *DBC* быть равнобедренными? Ученик: Могут (рассмотреть различные комбинации).

Учитель: Выведите следствие: что можно найти, зная две стороны треугольника и угол между ними? Ученик: Сторону, лежащую напротив данного угла. Площадь треугольника.

Учитель: Хорошо, если найдем сторону *AC*, сможем найти отрезки *AD* и *DC*. Ученик: Да.

Учитель: Если найдем площадь треугольника *ABC*, то как она связана с площадями треугольников *ABD* и *DBC?*

Ученик: Площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *ABD* и *DBC*.

Учитель: Как найти площади треугольников *ABD* и *DBC?* Ученик: Как произведение двух сторон на синус угла 30°.

Учитель: Как относятся площади треугольников *ABD* и *DBC?* Зная площадь треугольника *ABC*, можно ли найти площади треугольников *ABD* и *DBC?*

Ученик: Площади треугольников *ABD* и *DBC* относятся как 1:2, так как они имеют общую высоту и их основания лежат на одной прямой. Площадь треугольника *ABD* равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника *ABC,* площадь треугольника *DBC* равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника *ABC*.

Учитель: Какие углы составляет биссектриса *BD* со стороной *AC*?

Ученик: Смежные.

Учитель: Каким свойством обладают синусы смежных углов? Косинусы смежных углов?

Ученик: Синусы смежных углов равны, косинусы смежных углов противоположны.

Учитель: Пусть $\angle ABD = \alpha$. Найдите остальные углы.

Ученик: $\angle BAC = 180^\circ - \alpha$, $\angle BAD = 150^\circ - \alpha$, $\angle BCD = \alpha - 30^\circ$.

Учитель: Как связаны стороны и углы треугольника?

Ученик: Теоремой синусов.

Анализ условия задачи, выявляющий неявную информацию, приводит к различным её решениям.

1) Используя свойство биссектрисы ($\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{DA}$), введем обозначение $AD = x$, $DC = 2x$. Заметим, что можно применить теорему косинусов для составления уравнения и нахождения неизвестного (рис.2.8).

$(3x)^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60°$,

$9x^2 = 9 + 36 - 36 \cdot \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

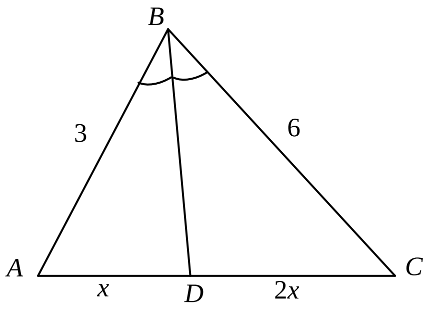


Рисунок 2.8. Чертеж к задаче

Таким образом, $AD = \sqrt{3}$, $DC = 2\sqrt{3}$, $\mathrm{AC} = 3\sqrt{3}$.

После того решение задачи можно продолжить двумя способами:

а) Еще раз применить теорему косинусов, например, в треугольнике *ABD*. $(\sqrt{3})^2 = 3^2 + BD^2 - 2 \cdot 3 \cdot BD \cdot \cos 30°$. $BD^2 - 3\sqrt{3}BD + 6 = 0$.

Решив квадратное уравнение относительно *BD,* получим корни $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$. Проверим каждый корень подстановкой в условие задачи: корень $2\sqrt{3}$ соответствует условию задачи, а $\sqrt{3}$ не удовлетворяет условию, так как возникает противоречие. При этом необходимо отметить, что исходный треугольник *ABC* является прямоугольным.

б) После нахождения отрезков *AD* и *DC* нужно обратить внимание учащихся на виды треугольников *ABC*, *ABD* и *DBC*. Треугольник *ABC* является прямоугольным, так как $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Значит, треугольник *ABD* так же является прямоугольным. Отрезок *BD* является гипотенузой и по свойству катета, лежащего напротив угла 30°, равен $2\sqrt{3}$.

2) Способ решения через площади. Нетрудно заметить, что площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей, составляющих его треугольников *ABD* и *DBC*. Для нахождения площадей используется формула через синус угла между сторонами.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot BD \cdot \sin 30° = \frac{3}{4} BD$.

$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot 6 \cdot \sin 30° = \frac{3}{2} BD$.

$\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} BD + \frac{3}{2} BD$, $BD = 2\sqrt{3}$.

3) $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. $S_{ABD} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $S_{ABD} = \frac{3}{4} BD$. Следовательно, $\frac{3}{4} BD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $BD = 2\sqrt{3}$.

4) Из треугольника DBC: $\frac{BD}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \frac{2x}{\sin 30^\circ}$.

Из треугольника ABC: $\frac{3}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \frac{3x}{\sin 60^\circ}$. Следовательно, $\sin(\alpha - 30^\circ) = \frac{\sin 60^\circ}{x}$. Подставив в первое равенство, получим $BD = 2\sqrt{3}$.

При решении задачи любым из способов необходимо сделать акцент на виде треугольника и перестроить чертеж.

Процессуальный блок формирования умения анализировать условие планиметрической задачи раскрывают методы и формы организации обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи и решения учащимися компонентной системы задач.

И.П. Подласый [124] трактует метод обучения, как упорядоченную деятельность педагога и учащихся, направленную на достижение заданной цели обучения.

Существует множество классификаций методов обучения, объединенных на основе одного или ряда общих признаков. Например, И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин [108] классифицируют методы обучения по типу (характеру) познавательной деятельности (уровню самостоятельности (напряженности) познавательной деятельности, которого достигают учащиеся, работая по предложенной учителем схеме обучения) и выделяют такие методы как объяснительно-иллюстративный (информационнорецептивный), репродуктивный, проблемное изложение, частично поисковый (эвристический), исследовательский.

Для нашей методики применимы следующие методы: метод проблемного изложения, частично поисковый метод, исследовательский. Предлагаемая нами система задач на первых этапах обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи составляется и излагается непосредственно учителем, однако включает в себя активную деятельность учащихся. На последующих этапах обучения предполагается составление системы задач самими учащимися.

Приведем пример *мозгового штурма* при организации работы с задачей без требования. Учащимся предлагается составить различные требования для заданного условия задачи. В результате этого они понимают и фиксируют связи между элементами планиметрической задачи, учатся выводить следствия из условия задачи (формулировать требования), что в дальнейшем будет способствовать более продуктивному анализу условия задачи.

Так, заданы координаты двух точек $A(-5;2)$ и $B(6;\ 0)$ и учениками предложены требования к данному условию.

Ученик 1: Вычислить длину отрезка AB.

Ученик 2: Найти расстояние между точками A и B.

Ученик 3: Найти координаты середины отрезка AB.

Ученик 4: Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

Ученик 5: Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой AB.

Ученик 6: Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой AB и проходящей через середину отрезка AB. (уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB.)

Ученик 7: Выяснить, принадлежит ли точка $M(11;\ -1)$ отрезку AB, прямой AB, серединному перпендикуляру AB.

На синтез учащимся отводится 2-3 минуты, затем заслушиваются предложения, решаются составленные учащимися задачи.

Для организации мозгового штурма подойдет любая задача с несформированным требование. Например,

в равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 8, а угол между ними 120°;

задан треугольник со сторонами 13, 14, 15;

радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника равен $4\sqrt{3}$.

По классификации Ю.К. Бабанского [11] методы обучения разделяются на три большие группы.

Первую группу составляют методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности.

Специфичными для нашей методики являются: наглядные (изображение чертежа к задаче, работа на готовых чертежах), практические (построение чертежа и его изменение), индукция и дедукция (выведение основных геометрических закономерностей – основа анализа условия планиметрической задачи), проблемно-поисковые (учебные ситуации на выявление связей между условием и требованием задачи).

Особенности работы на готовых чертежах описаны автором диссертационного исследования в статье «Актуальность использования задач на готовых чертежах при обучении учащихся 7 класса анализу условии планиметрических задач» (Известия Волгоградского государственного педагогического университета. – 2021. – №6 (159). – С. 85–91). Отметим только, что эта работа организуется при решении специальных задач на выделение объекта и записи его названия, на комбинацию фигур, на нетипичное расположение фигуры, на доопределение условия и пр.

Опишем приемы работы на построение и изменение чертежа на примере следующей задачи: *«Найти площадь трапеции ABCD, если BC = AC = 5, основание AD = 6, угол ADB в два раза меньше угла ACB»*.

Фабула задачи выглядит достаточно простой, никаких трудностей не возникает, и учащиеся сразу приступают к построению чертежа «типичной» трапеции (рис.2.9). При этом учащиеся отмечают отрезки, которые явно неравны, что требует изменения чертежа (рис.2.10).

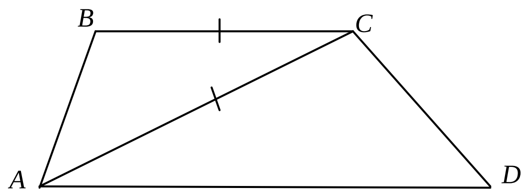


Рисунок 2.9. Ошибочный чертеж к задаче

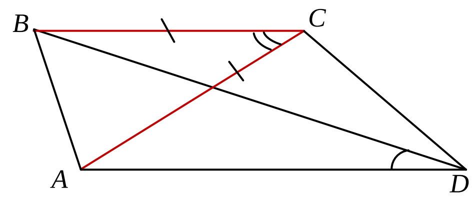


Рисунок 2.10. Правильный чертеж к задаче

Учитель: Назовите равные углы.

Ученик: *ADB* и *DBC, BCA* и *CAD, CBA* и *BAC*.

Учитель: Какое соотношение между углами *BCA* и *ADB.*

Ученик: *BCA* в 2 раза больше *ADB.*

Учитель: Вспомните, в каких случаях какие углы связаны таким соотношением.

Ученик: В окружности центральный угол в 2 раза больше вписанного.

Учитель: Можно ли тогда предположить, что углы *BCA* и *ADB* являются углами окружности? Какими?

Ученик: Да. *BCA* – центральный, *ADB* – вписанный.

Учитель: Если *BCA* – центральный угол, тогда где лежит центр окружности? Ученик: В точке *C*.

Учитель: Принадлежит ли точка *D* окружности? Почему? Ученик: Да. Потому что угол *ADB* – вписанный, и его вершина лежит на окружности.

Учитель: Назовите радиусы окружности. Ученик: *CB, CA, CD.*

Чертим окружность с центром в точке *C* и радиусами *CB, CA, CD.*

Учитель: Объясните необходимость условия *BC* = *AC*.

Ученик: Иначе угол *BCA* не был бы центральный.

Учитель: Исключив связь между углами *BCA* и *ADB*, переформулируйте задачу.

Ученик: *Найти площадь трапеции ABCD, если BC = AC = CD = 5, основание AD = 6.*

Учитель: Элементами каких фигур являются отрезки *BC*, *AC* и *CD*?

Ученик: *BC*, *AC и CD*. *BC* – сторона треугольников *ABC*, *BCD*. *AC* – сторона треугольников *ABC, ACD*. CD – сторона треугольников *BCD, ACD.*

Учитель: Назовите равнобедренные треугольники. Ученик: *BCA, BCD, ACD.*

Учитель: Что требуется найти? Ученик: Площадь трапеции *ABCD.*

Учитель: Что для этого нужно знать? Ученик: Высоту, основания.

Учитель: Что не известно? Ученик: Высота.

Учитель: Из какой вершины удобнее ее провести? Ученик: Из точки *C*.

Проводим на чертеже высоту *CK*.

Учитель: Элементом каких фигур является отрезок *CK?*

Ученик: Высота трапеции, высота треугольника *ACD,* катет прямоугольных треугольников *ACK* и *DCK*.

Учитель: Каким свойством обладает высота в треугольнике *ACD*? Почему?

Ученик: *CK* является медианой и биссектрисой, так как треугольник *ACD* – равнобедренный.

В ходе анализу у учащихся появляется новый чертеж, который сразу приводит к решению задачи (рис.2.11).

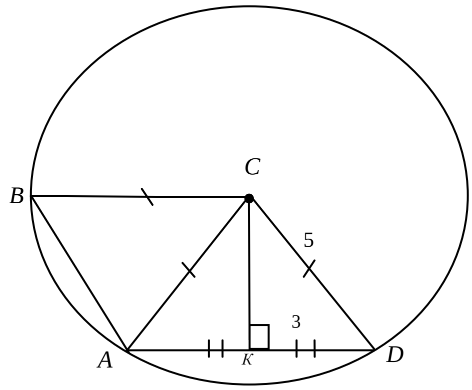


Рисунок 2.11. Чертеж после анализа условия

Ученик: По теореме Пифагора $CK = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5+6) \cdot 4 = 22$.

Следующими специфичными для нашей методики являются методы индукции как познания, идущего от отдельных фактов к обобщениям, и дедукции – от обобщений к конкретизации. А предметом познания являются связи между элементами фигур и объектами, которые могут быть положены в условие планиметрических задач.

Например, рассмотрим многовопросную задачу: «Даны точки $A(3; 5)$ и $B(-1; -2)$. Напишите уравнение прямой, перпендикулярной AB и проходящей через 1) точку C – середину отрезка AB; 2) точку M, принадлежащей прямой AB; 3) точку P, не принадлежащей прямой AB».

Чтобы написать уравнение прямой $y = kx+b$, надо найти коэффициенты k и b. Далее учащиеся определяют свои действия. Вывод: где бы не располагалась точка относительно данной прямой, порядок действий для написания перпендикуляра, проходящего через точку плоскости, одинаков. С точки зрения формирования умения анализировать условие планиметрической задачи закрепляем связь – зная координаты двух точек всегда можно составить уравнений перпендикуляра через любую точку плоскости к прямой данных точек. Назовем такие ситуации – *ситуациями обобщения*.

Или *ситуации конкретизации*. Доказав для произвольного четырехугольника $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O, что $S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$, конкретизируем это свойство для параллелограмма ($S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$) и трапеции ($S_{AOB} = S_{DOC} = \sqrt{S_{AOD} \cdot S_{BOC}}$).

Вообще, важным для авторской методики является построение учебной ситуации как единицы процесса обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи. Конечно же, ядром такой учебной ситуации является задача на выявление связей между структурными элементами предметной задачи.

В логике нашего исследования под *учебной ситуацией* будем понимать особую единицу процесса обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи, организованную учителем, в которой учащиеся:

– обнаруживают предмет своего действия (структурные элементы задачи и связи между ними);

– исследуют его, совершая разнообразные действия анализа условия задачи;
– выполняют чертеж, соответствующий условию планиметрической задачи;
– пересказывают условие (часть условия).

Процесс разрешения учебных ситуаций должен происходить через диалог (внутренний диалог, диалог с товарищем, с группой учащихся, с учителем).

Например, *ситуация «Элемент фигуры»*. Учащиеся анализируют готовый чертеж, один из учеников выделяет некий элемент заданной фигуры и формулирует его связь с другим каким-либо элементом этой фигуры. Задача остальных учеников сформулировать связь между этим элементом фигуры с другим каким-либо элементом с точки зрения других фигур. Таким образом, учащиеся более тщательно анализируют чертеж, выявляют скрытые свойства задачной ситуации.

Пример. Треугольник *ABC* – равнобедренный (рис. 2.12).

Ученик 1: Отрезок *ВК* – высота треугольника *ABC*.

Ученик 2: Отрезок *ВК* – катет треугольника *ВКС*.

Ученик 3: Отрезок *ВК* – катет треугольника *ВКА*.

Ученик 4: Отрезок *ВС* – сторона треугольника *ABC*.

Ученик 2: Отрезок *ВС* – гипотенуза треугольника *ВКС*.

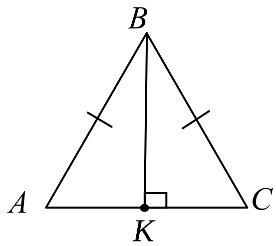


Рисунок 2.12. Элемент фигуры

Приведем еще примеры чертежей для работы (рис. 2.13).

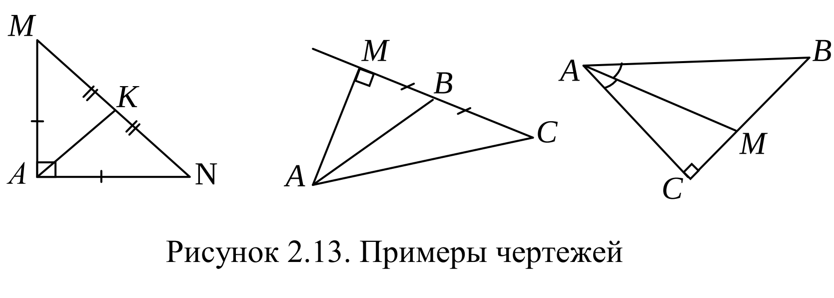


Рисунок 2.13. Примеры чертежей

Ситуация «Верно ли…?». Учащемуся необходимо проанализировать условие задачи, выявить скрытые свойства задачной ситуации и на основе этого сформулировать вопрос для других учащихся по условию задачи: «Верно ли?..»

Пример: «*В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 8, а угол между ними – 120°. Найдите основание треугольника*».

Ученик 1: Верно ли, что углы при основании равны?

Ученик 2: Верно ли, что треугольник равносторонний?

Ученик 3: Верно ли, что основание – это большая сторона треугольника?

Ученик 4: Верно ли, что высота, проведенная к боковой стороне, лежит вне треугольника?

Ученик 5: Верно ли, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на медиане, проведенной к боковой стороне (к основанию)?

Ученик 6: Верно ли, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне треугольника?

Приведем краткую характеристику учебных ситуаций на выявление связей между условиями и требованиями планиметрической задачи (табл.2.4).

Таблица 2.4

Типология учебных ситуаций на выявление связей между условиями и требованиями планиметрической задачи

Название учебной ситуации	Краткое описание ситуаций, решаемых задач
Ситуация «Успеха»	Использование компонентной системы задач на этапе анализа условия планиметрической задачи обеспечивает успех ее решения.
Ситуация «Выбора»	Чтобы поставить учащихся в ситуацию выбора стратегии решения задачи, на этапе анализа условия необходимо выявить как можно больше связей между структурными элементами задачи.
Ситуация «Возврата»	Ситуация возврата к анализу условия задачи после получения правильного результата. («Решите задачу. После получения правильного ответа вернитесь, если

	вам это интересно, к поиску других способов ее решения».)
Ситуация «Название объекта»	Задачи по готовым чертежам на выделение (нахождение) объекта и записи его названия.
Ситуация «Комбинация фигур»	Задачи на связь между элементами фигур. Например, задача на построение: «*В треугольнике проведены все высоты. Постройте «вспомогательные» окружности*».
Ситуация «Элемент фигуры»	Учащимся необходимо сформулировать элементом какой фигуры является данный объект.
Ситуация «Условия на чертеже»	Учащиеся по чертежам составляют условия планиметрических задач.
Ситуации «Дорисуй фигуру», «Найди часть фигуры»	Изображение (поиск) геометрических фигур.
Ситуация «Существует ли такая фигура?»	Используются «провокационные» задачи, в которых чертеж не соответствует условию задачи или объект не существует. Учащиеся аргументируют свои выводы. Например, «*Определите вид прямоугольного треугольника, у которого радиус окружности, вписанной в треугольник, лежит на биссектрисе прямого (острого) угла*».
Ситуация «Замени определением, сформулируй свойство»	Задачи на «расшифровку» всех понятий, используемых в задаче. Учащимся также предлагается сформулировать свойства понятий.
Ситуация «Обратная задача»	Учащиеся формулируют обратные задачи к данной, устанавливают их истинность (непротиворечивость).
Ситуация «Обобщение»	Рассматриваются частные случаи задачной ситуации, затем формулируется задача-обобщение.
Ситуация «Конкретизация»	Задача переформулируется для частных случаев.
Ситуация «Поиск аналогов»	Рассмотрение (поиск) задач-аналогов по одинаковым связям между элементами объектов, рассмотренных в задаче.
Ситуация «Доопредели условие»	Рассматриваются недоопределенные задачи. Учащиеся должны понять, каких данных для решения задачи не хватает и доопределить условие задачи.
Ситуация «Лишние условия»	Рассматриваются переопределенные задачи. Учащиеся определяют, какие условия лишние, нет ли противоречий между лишними условиями.
Ситуация «Сформулировать	Используются задачи с несформированным

требование»	требованием. Учащиеся для данного условия формируют как можно больше требований.
Ситуация «Перевод задачи»	Планиметрические задачи «переводятся» на векторный язык, на язык аналитической геометрии. И наоборот, векторные равенства, уравнения, неравенства и их системы переводятся на геометрический язык.
Ситуация «Переформулирование условия»	Учащиеся решают задачи на преобразование формулировок в равносильные. Необходимо переформулировать задачу по-другому. Например, «*Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине*» ↔ «*Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два равнобедренных треугольника*» ↔«*Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, совпадает с радиусом описанной около треугольника окружности*».
Ситуация «Геометрия на практике»	Учащиеся строят геометрические модели условия жизненно-практических задач. («*Поместиться ли трость, длиной 1 м, в чемодан размерами 40 см × 50 см × 20 см?*» ↔ «*Найти длину диагонали прямоугольного параллелепипеда и сравнить с длиной трости.*»)
Ситуация «Объект на клетчатом листе»	Учащиеся записывают свойства объекта, изображенного на клетчатом листе. При помощи свойств клетчатого листа устанавливается равенство, параллельность, перпендикулярность элементов объекта. Клетчатый лист используется как средство для анализа информации.
Ситуация «Верно ли …?»	После анализа условия задачи и выявления не явно заданной информации, сформулировать вопрос для других учащихся по условию задачи «Верно ли…?»
«Диалогические сочетания», «Круговой диалог», «Аргументы»	Организация диалога (пары сменного состава, диалог с товарищем, с группой учащихся и пр.) по выявлению связей между условиями и требованиями планиметрической задачи.

Вторую группу методов в классификации Ю.К. Бабанского образуют методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности.

Организация диалогового взаимодействия (беседа, дискуссия и пр.) между участниками процесса, продвижение в познании, обеспечение успеха в решении планиметрических задач направлены на формирование положительной мотивации и активизации деятельности учащихся по анализу условия планиметрических задач.

Приведем пример *организации диалога* при анализе условия задачи: «*Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, со сторонами 10, 10, 12*». (Рис. 2.14.)

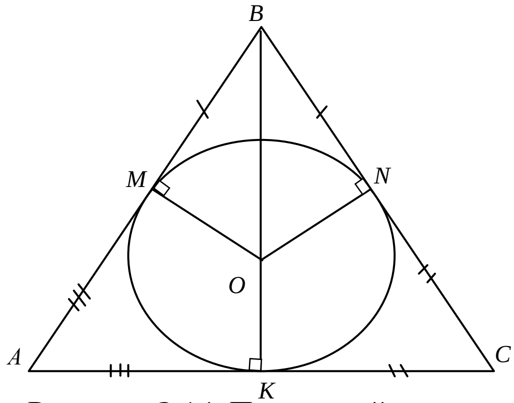


Рисунок. 2.14. Первичный чертеж

Учитель: Что дано в условии?

Ученик: Равнобедренный треугольник, стороны 10, 10 и 12.

Учитель: Что можно найти, зная три стороны треугольника?

Ученик: Площадь, периметр, углы.

Учитель: Элементами каких фигур являются отрезки *MB*, *NB*?

Ученик: *MB* – сторона треугольника *MBN*, катет треугольника *OMB*, отрезок касательной к окружности, проведенной из точки *B*. *NB* – сторона треугольника *MBN*, катет треугольника *ONB*, отрезок касательной к окружности, проведенной из точки *B*.

Учитель: Элементами каких фигур являются отрезки *MO, NO*?

Ученик: *MO* – катет треугольника *OMB*, сторона треугольника *MON*, радиус окружности. *NO* – катет треугольника *ONB*, сторона треугольника *MON*, радиус окружности.

Учитель: Назовите равные отрезки? Почему они равны?

Ученик: *MB = BN, NC = CK, AK = AM* – как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Ученик: *OM = OK = ON* – как радиусы вписанной окружности.

Ученик: *AK = KC* по определению медианы.

Учитель: Элементом каких фигур является отрезок *BK*?

Ученик: *BK* – катет прямоугольных треугольников *AKB* и *BKC*, высота, биссектриса и медиана треугольника *ABC*.

Учитель: Назовите все равнобедренные треугольники.

Ученик: *MBN, MON, MOK, KON, MAK, KCN, ABC*.

Учитель: Назовите прямоугольные треугольники.

Ученик: *MBO, BON, ABK, BKC*.

Учитель: Назовите подобные треугольники. Почему?

Ученик: $\Delta MBO \sim \Delta ABK$, так как угол *MBO* – общий, угол *BMO* равен углу *BKA* – как прямые. $\Delta NBO \sim \Delta CBK$, так как угол *OBN* – общий, угол *BNO* равен углу *BKC* – как прямые.

Учитель: Назовите равные углы. Почему?

Ученик: Углы *MBO* и *OBN* равны по определению биссектрисы, углы *OMB, BNO, BKA, BKC* прямые, углы *MOB, BAK, BON, BCK* равны из подобия треугольников.

Учитель: Какие значения могут принимать синус и косинус углов *MOB* и *BAK*?

Ученик: значение синуса/косинуса равных углов – равны.

После анализа учащиеся имеют подробный чертеж и набор известных величин, связей, благодаря чему учащийся сам выбирает более очевидный ему путь решения (рис. 2.15).

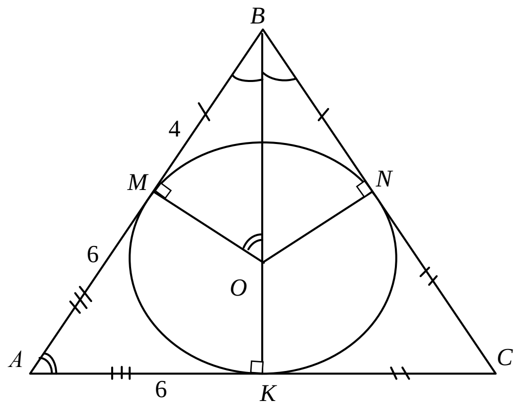


Рисунок 2.15. Чертеж после анализа условия

1. а) Найдем *BK* из прямоугольного треугольника *ABK* по теореме Пифагора: $BK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

   Рассмотрим подобные треугольники $\Delta MBO \sim \Delta ABK$. Обозначим искомый радиус за x. Составим соответствующие пропорции: $\frac{AB}{BO} = \frac{AK}{MO}, \frac{10}{8-x} = \frac{6}{x}, 10x = 48 - 6x, x = 3$.

   б) «Шагая по периметру», найдем отрезки *AM, MB*. Составим пропорцию из подобия треугольников *MBO* и *ABK*: $\frac{BK}{MB} = \frac{AK}{MO}, \frac{8}{4} = \frac{6}{x}$, $x = 3$.

c) Рассмотрим подобные треугольники $\Delta MBO \sim \Delta ABK$. Выразим значение синуса для угла *MBK* из этих треугольников. Обозначим искомый радиус за x.

$\sin ABK = \frac{MO}{BO} = \frac{x}{8-x}$, $\sin ABK = \frac{AK}{AB} = \frac{6}{10} = 0.6$, $\frac{x}{8-x} = 0.6$, $x = 3$.

2. Вспомним формулу для нахождения площади через радиус: $S = p \cdot r$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности. Найдем площадь по формуле Герона или через высоту и основание. Прировняв площади, выразим радиус окружности: $S = 6 \cdot 8 = 48$, $p = \frac{10+10+12}{2} = 16$, $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$.

При решении задачи учитель не навязывает метод, а сопровождает учащегося по выбранному им пути решения.

Приведем примеры организации «*диалоговых*» *ситуаций* при анализе условия планиметрических задач.

Например, учащимся предлагается проанализировать условие задачи, заданной на чертеже. При этом учащиеся по очереди называют данные и связи между ними, дополняя друг друга. В результате такого взаимодействия не только происходит анализ условия задачи, но развиваются коммуникативные качества учащихся.

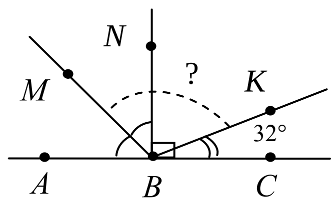


Рисунок 2.16. Чертеж к «диалоговой» ситуации

Пример (рис.2.16).

Ученик 1: Угол *ABM* равен углу *MBN*.

Ученик 2: Угол *NBC* равен 90°.

Ученик 3: Угол *KBC* равен 32°.

Ученик 4: Угол *NBA* равен 90°.

Ученик 5: Углы *ABM* и *MBC* – смежные.

Ученик 6: Углы *ABK* и *KBC* – смежные.

Ученик 5: Требуется найти угол *MBK*.

Приведем еще примеры чертежей для работы (рис.2.17).

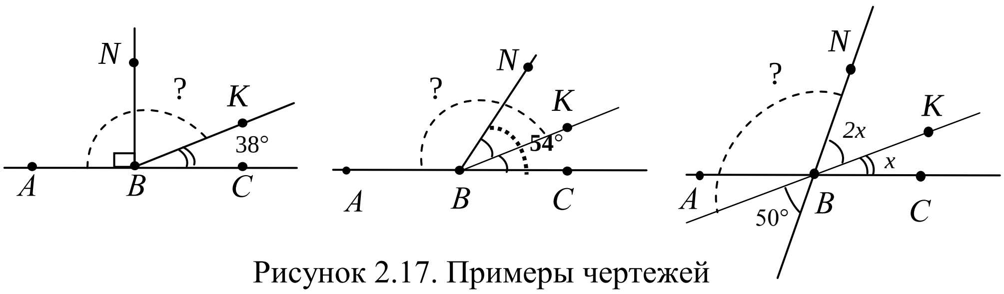


Рисунок 2.17. Примеры чертежей

Методы контроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности и самоконтроля составляют третью группу в классификации Ю.К. Бабанского.

Для нашей методики это методы устного, письменного, графического контроля, а также методы самоконтроля и самооценки. Выполнение заданий учащимися из компонентной системы задач может проводиться устно и письменно, в качестве домашней или самостоятельной работы.

Формами работы обучающихся с компонентной системой задач выступают как индивидуальные, так и групповые, фронтальные.

Приведем пример системы задач как варианта самостоятельной работы к задаче, решаемой в классе.

Задача: «*Найдите площадь трапеции ABCD с основанием AB и CD, если AB=10 см, BC = DA = 13 см, CD = 20 см*». (Рис. 2.18.)

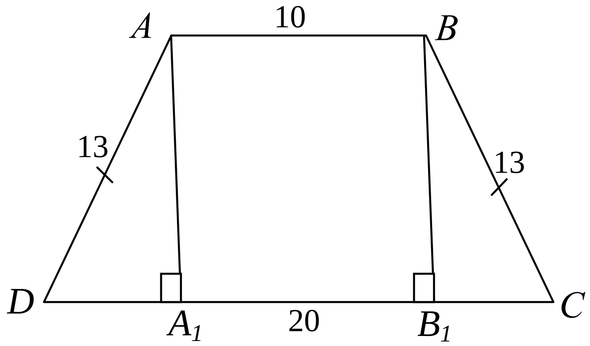


Рисунок 2.18. Чертеж к задаче

Система вопросов и задач

1. Вопросы и задачи для осознания смысла слов, входящих в формулировку задачи.

✓ Какие стороны трапеции параллельны?

✓ Являются ли отрезки *AD* и *BC* основаниями трапеции?

✓ У любой ли трапеции боковые стороны равны?

- ✓ Какие из углов трапеции равны?
- ✓ Какие из отрезков трапеции равны?
- ✓ Сумма каких углов трапеции равна 180°?

2. Выбрать элементы задачи, рассматриваемые в различных сочетаниях

- ✓ Элементами каких фигур является отрезок AA_1?
- ✓ Элементами каких фигур является отрезок BB_1?

3. Переформулировать условие (данные/требование) задачи в равносильное.

Например: *Найдите площадь равнобедренной трапеции ABCD, с боковой стороной 13 см и основаниями 10 см и 20 см.*

4. Составить и решить обратную задачу.

Например: *Площадь равнобедренной трапеции равна 180 см^2, основания – 10 см и 20 см. Найдите боковую сторону.*

5. Составить и решить (если возможно) задачу нестандартизированную.

   Например: *Найдите площадь трапеции ABCD с боковой стороной 13 см и основаниями 10 см и 20 см.*

В данном случае задача не имеет решения, но необходима для осознания важности вида трапеции.

6. Составить и решить задачу на отработку ключевой идеи (в равнобедренной трапеции высоты отсекают два равных треугольника).

Например: *В равнобедренной трапеции ABCD, боковая сторона равна 10 см, высота – 6 см, а меньшее основание – 8 см. Найдите большее основание.*

При решении задач необходимо выполнять чертеж, данные и искомые величины отмечать разными цветами, соблюдать символику (равные углы отмечать равными дугами, равные отрезки – равными штрихами).

7. Найти ошибку на чертеже рисунок 2.19.
8. Составить условие по чертежу рисунок 2.20.
9. Изобразить чертеж к данной задаче, изменив расположение точек (если возможно).

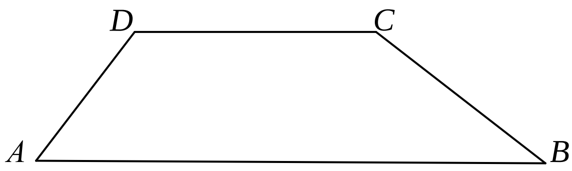


Рисунок 2.19. Найдите ошибку на чертеже

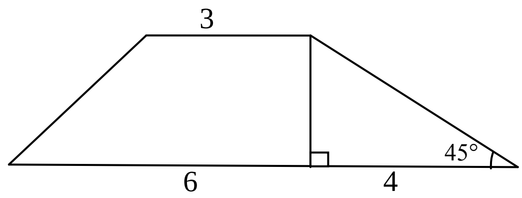


Рисунок 2.20. Составьте условие по чертежу

Для самостоятельного решении учащимися планиметрических задач необходимо вооружить их следующей системой эвристик:

1. Вдуматься в смысл каждого слова в тексте задачи (каждого символа, термина).
2. Выделить условие и требование задачи.
3. Выяснить, какие из элементов задачной ситуации заданные, известные, а какие искомые, неизвестные.
4. Выполнить чертеж, помогающий осмыслить задачу (можно схематически). Отметить на нем данные и искомые величины. Правильное графическое представление условия задачи означает четкое, ясное и конкретное представление о заданной ситуации в целом.
5. Пытаться охватить условие задачи в целом, отметить ее особенности.
6. Продумать, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли условие избыточных, недостающих, противоречащих друг другу данных.
7. Изучить цель, поставленную задачей, выявить теоретические положения, связанные с данной задачей в целом или с некоторыми ее элементами.

Важным моментом в процессе осознания учащимися условия планиметрической задачи является построение чертежа. Чертеж будет необходимым звеном в процессе анализа условия планиметрической задачи, если:

1) чертеж будет выполнен аккуратно, достаточно крупно, с соблюдением масштаба, отвечающего реальному соотношению величин;

2) на чертеже будут четкие символические обозначениях данных условия (равные отрезки отмечены равными штрихами, равные углы – равными дугами, перпендикулярные прямые – знаком перпендикуляра);

3) на чертеже будет изображен общий случай фигуры, заданной условием, включающий все ранее рассмотренные частные случаи (рассмотрение частных случаев допускается для осознания условия, для отыскания способов решения задачи);

4) видоизменять чертеж (перемещать отдельные элементы фигуры, рассматривать ее в новом положении).

Блоки методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи представлены на рисунке 2.21.

Целевой блок

Содержательный блок

Процессуальный блок

Глобальная цель – формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи

Фазовые цели отражают динамику умения анализировать условие планиметрической задачи в рамках учебных тем

Интегративная цель – формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие любых задач

Компонентная система задач

Статический компонент:

1) задачи на осознание смысла слов, входящих в формулировку задачи;
2) задачи на распознавание известных элементов в различных сочетаниях

Преобразующий компонент:

1) задача на преобразование формулировки в равносильное;
2) обратные задачи;
3) нестандартизированные задачи;
4) задачи на отработку ключевой идеи (переосмысление элементов фигуры с точки зрения другого понятия)

Графический компонент:

1) задачи на нахождение ошибки в чертеже;
2) задачи на составление условия по чертежу;
3) задачи на варьирование чертежа

Методы по типу познавательной деятельности: проблемное изложение; частично поисковый, исследовательский (беседа, дискуссия, диспут, мозговой штурм, практические, проектные)

Методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности: наглядные (изображение чертежа к задаче, работа на готовых чертежах); практические (построение чертежа и его изменение); индукция и дедукция (выведение основных геометрических закономерностей – основа анализа условия планиметрической задачи); проблемно-поисковые (учебные ситуации)

Методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности: ситуации успеха, выбора, новизны, актуальности, поиска

Методы контроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности и самоконтроля: методы устного, письменного, графического контроля, а также методы самоконтроля и самооценки

Дидактические условия эффективной реализации методики:

– включение в содержание школьного курса планиметрии компонентной системы задач;
– овладение учителем математики методикой обучения учащихся анализировать условие планиметрической задачи;
– реализация основных положений деятельностного подхода в процессе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;
– включение в систему знаний учащихся эвристик по анализу условия планиметрической задачи;
– вовлечение учащихся в деятельность составления компонентной системы задач

Рисунок 2.21. Блоки методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи

2.2. Опытно-экспериментальная работа по реализации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи

Опытно-экспериментальная работа представлена констатирующим, поисковым и формирующим педагогическими экспериментами.

Она проводилась на базе МБОУ «ГСОШ №1 Городищенского района Волгоградской области» и ГАОУ ДПО «Волгоградская государственная академия последипломного образования» с 2012 по 2021 гг.

В экспериментальной работе приняли участие 280 человек, среди которых 50 учителей математики Волгограда и Волгоградской области.

Констатирующий эксперимент проводился с учителями математики (50 человек) на базе Волгоградской государственной академии последипломного образования, с учениками 8-9 классов МБОУ Городищенской СОШ №1 и студентами 5 курса ВГСПУ факультета МИФ (74 респондента). Подробное описание эксперимента и его результаты приведены в параграфе 1.1 данного исследования.

В ходе ***поискового эксперимента***, в котором приняли участие учащиеся 7-9 классов МБОУ Городищенской СОШ №1 (70 человек), анализировались методические подходы формирования у учащихся умения анализировать условие планиметрической задачи, апробировались отдельные компонентные системы задач и требования к ним, уточнялась гипотеза исследования.

В результате поискового эксперимента были выделены следующие ***дидактические условия эффективности методики*** обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи:

– включение в содержание школьного курса планиметрии компонентной системы задач;

– овладение учителем математики методикой обучения учащихся анализировать условие планиметрической задачи;

– реализация основных положений деятельностного подхода в процессе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

– включение в систему знаний учащихся эвристик по анализу условия планиметрической задачи;

– вовлечение учащихся в деятельность составления компонентной системы задач.

Цель ***формирующего эксперимента*** – доказать эффективность разработанной методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Формирующий эксперимент был организован и проведен в естественных условиях учебного процесса на уроках геометрии с учащимися 8-9 классов (86 человек) МБОУ «ГСОШ №1 Городищенского района Волгоградской области»: экспериментальная группа – 42 человека, контрольная группа – 44 человека.

В контрольной группе решение и анализ условия планиметрической задачи проводились по классической методике, в экспериментальной – по авторской методике. Методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи описана в параграфе 2.1. В приложении 2, 3 представлены фрагменты уроков геометрии в 7-9 классах, проведенных в ходе формирующего эксперимента.

Рассмотрим фрагменты обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи.

Учащимся для решения предлагается задача №461 из учебника (Геометрия 7-9 класс, Л.С. Атанасян): «*Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол* 30°. *Найдите площадь параллелограмма*». Задача решалась фронтально.

Учитель изобразил на доске чертеж к данному условию (рис. 2.22).

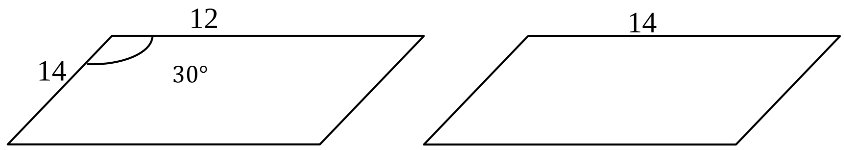


Рисунок 2.22. Чертежи к задаче

Только один ученик сделал замечание о допущенной ошибке в выборе угла. На неправильный выбор сторон параллелограмма учащиеся указали только после дополнительного вопроса учителя.

Аня Д.: Для нахождения площади параллелограмма необходимо воспользоваться формулой $S = a \cdot h$, следовательно, необходимо опустить высоту.

Гриша В.: Проведенная высота является катетом прямоугольного треугольника и равна половине гипотенузы, так как лежит напротив угла $30°$. Значит $BH = 6$.

Лера Д.: Подставив известные величины в формулу, найдем площадь $S = 14 \cdot 6 = 84$.

Учитель: Какие стороны параллелограмма равны? Сумма каких углов параллелограмма равна $180°$? Сколько градусов составляет угол *ABH*? Найдите отрезок *AH*. Элементами каких фигур являются отрезки *AB, BH, AH*?

Учащиеся отвечали на вопросы письменно в тетрадь, после чего делали взаимопроверку.

Учитель: Возможно ли переформулировать условие задачи в равносильное? Учащиеся: Нет.

Учитель: Площадь параллелограмма равна 84, высота – 6. Найдите основание.

Иван Н.: Из формулы площади можно сразу выразить основание, $a = \frac{S}{h} = \frac{84}{6} = 14$.

Учитель: Все верно. Как известно, такая задача называется обратной. Попробуйте самостоятельно сформулировать и решить еще одну обратную задачу.

Гриша В.: Площадь параллелограмма равна 84, сторона – 14. Найдите высоту, проведенную к данной стороне.

Лера Д.: Одна из сторон параллелограмма равна 12, а высота, опущенная на другую сторону, равна 6. Найдите угол между сторонами.

Учитель: Возможно ли было решить задачу по-другому? По-другому провести высоту? Какой ответ бы мы получили?

Аня Д.: Еще возможно провести высоту к основанию равному 12, тогда она будет равна 7, следовательно, значение площади $S = 7 \cdot 12 = 84$ не изменится.

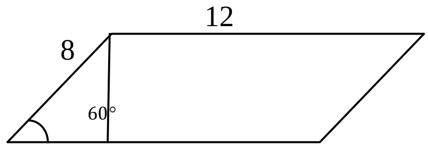


Рисунок 2.23. Готовый чертеж на доске

Учитель: Составьте и решите задачу по чертежу, изображенному на доске (рис 2.23).

Денис П.: Стороны параллелограмма равны 8 и 12, а угол между ними – $60\ °$. Найдите площадь.

Приведенный фрагмент показывает применение компонентной системы задач. В результате чего учащиеся еще раз тщательно анализируют условие, актуализируют знания, применение которых необходимо в дальнейшем ходе урока.

Доказательство эффективности разработанной методики обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи требует описания диагностики для определения уровней сформированности соответствующего умения. Приведем пример диагностической работы, которая была предложена обеим группам после изучения темы «Площадь» из курса геометрии 8 класса.

Диагностика статистического компонента умения анализировать условие планиметрической задачи

Задача 1: *В равнобедренном треугольнике ABC с основание BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.*

1. О какой фигуре идет речь?

2. Какой условие необходимо, чтобы треугольник был равнобедренным?

3. Какие величины известны в задаче?

4. Элементами каких фигур является отрезок *AD*?

5. Элементами каких фигур является отрезок *DM*?

6. Элементами каких фигур является отрезок *AC*?

7. Сравните отрезок *BD* с отрезками *DC* и *BC*.

8. Сравните отрезок *AM* с отрезками *MC*, *AC*.

9. Что требуется найти?

10. Что необходимо знать, чтобы найти площадь треугольника?

Ключ к диагностике

Задача 1.

1. Равнобедренный треугольник – 1б, другие варианты – 0 б.

2. Пара равных сторон и углов– 2 б, одно условие – 1 б, другие варианты – 0 б.

3. $AD = 8$, $DM = 8$ – 1 б, другие варианты – 0 б.

4. *AD* – высота треугольника *ABC*, катет треугольников *ADC* и *ADB* – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

5. *DM* – медиана треугольника *ADC* – 1 б, другие варианты – 0 б.

6. *AC* боковая сторона треугольника ABC, гипотенуза треугольника *ADC* – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

7. $BD = DC = \frac{1}{2}BC$ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

8. $AM = MC = \frac{1}{2}AC$ – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

9. Площадь треугольника *ABC* – 1б, другие варианты – 0 б.

10. Основание *BC* и высоту *AD* – 2 б, неполный ответ – 1 б, другие варианты – 0 б.

Максимальное количество баллов – 16.

От 14 – 16 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи сформирован (III уровень сформированности).

От 10 –13 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи сформирован не полностью или находится на стадии формирования (II уровень сформированности).

От 0 – 9 баллов – статистический компонент умения анализировать условие планиметрической задачи не сформирован (I уровень сформированности).

Диагностика преобразующего компонента умения анализировать условие планиметрической задачи

1. Выполните задание из таблицы 2.5.

Таблица 2.5

Найдите и сопоставьте одинаковые (равносильные) задачи из левого и правого столбца

a) Найдите площадь трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD*, если углы *C* и *D* равны 60°, а стороны *AB* и *BC* равны 8 см.	1. Найдите площадь равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD*, если меньший угол трапеции равен 60°, а меньшее основание равное 8 см равно боковой стороне. 2. Найдите площадь трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD*, если меньший угол трапеции равен 60°, а меньшее основание равное 8 см равно боковой стороне. 3. Найдите площадь равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD*, если меньший угол трапеции равен 60°, а меньшее основание равно 8 см.
b) Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.	1. Найдите высоты равнобедренного треугольника со сторонами 10 см и 12см. 2. Найдите высоты равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см и основание 12 см. 3. Найдите высоты равнобедренного треугольника с боковой стороной 12 см и основание 10 см.
c) Периметр равнобедренного треугольника *ABC* равен 40 см, а основание 12 см.	1. Периметр равнобедренного треугольника *ABC* равен 40 см, $AB = AC, AC = 12$ см. Найдите *BC*. 2. Периметр треугольника *BAC* равен 40 см, $AB = BC$, $AC = 12$ *см*. Найдите *AB* и *BC*. 3. Периметр треугольника *BAC* равен 40 см, $AB = BC = 12$. Найдите *AC*.

Найдите площадь.	

2. Дополните условие задачи недостающими величинами.

a) Найдите площадь параллелограмма, основание которого равно 6 см, _______ 3 см.

b) Найдите высоту треугольника, если его основание равно 12 см, а _________ равна 30 см^2.

c) Найдите __________ трапеции, если высота равна 6, а площадь – 60.

3. Сформулируйте утверждение обратные данным:

a) Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

b) Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон треугольника, то треугольник прямоугольный.

Ключ к диагностике

1. За каждое правильное сопоставление 1 балл.
2. За каждый правильный ответ 1 балл.

а) высота б) площадь в) средняя линия

3. За каждое сформулированное утверждение – 1 балл.

Максимальное количество баллов – 8.

7-8 баллов – преобразующий компонент сформирован (III уровень сформированности).

5-6 баллов – преобразующий сформирован частично или находится в стадии формирования (II уровень сформированности).

0-4 баллов – преобразующий компонент не сформирован (I уровень сформированности).

Диагностика графического компонента умения анализировать условие планиметрической задачи

1. Составьте условие задачи по чертежу (рис. 2.24).

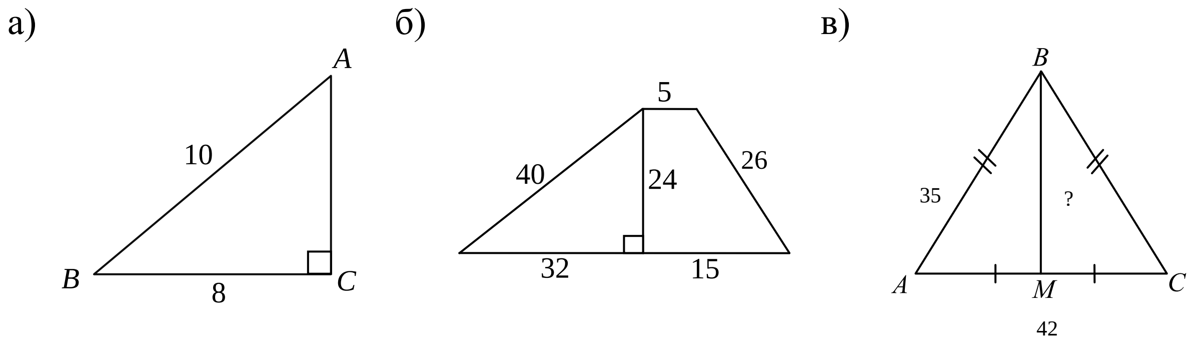


Рисунок 2.24. Составьте условие задачи по чертежу

2. Составьте чертеж по условию задачи.

а) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее меньшее основание равно 18 см, высота – 9 см и острый угол равен 45°.

b) Площадь ромба равна 540 см^2, а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

Ключ к диагностике

1. За каждое верно составленное условие – 1 балл.

   Например,

   а) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, $AB = 10$, $BC = 8$. Найдите площадь треугольника

   б) В трапеции высота, равная 24 см делит большое основание на отрезки 32 см и 15 см, меньшее основание трапеции равно 5. Найдите площадь трапеции.

   в) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 42, а боковая сторона – 35. Найдите площадь треугольника.

2. За каждое выполненное условие 1 балл, таким образом, максимальное кол-во баллов за каждое задание – 4.

- ✓ Чертеж отражает реальную фигуру, о которой идет речь в условии (то есть верно выполнено распознавание фигуры). (Если дан треугольник, то изображен треугольник, а не окружность.)
- ✓ Чертеж выполнено аккуратно с соблюдением масштаба, отвечающего реальному соотношению величин.

- ✓ Чертеж имеет четкие символические обозначениях данных условия (равные отрезки отмечены равными штрихами, равные углы – равными дугами, перпендикулярные прямые – знаком перпендикуляра).
- ✓ На чертеже символьные обозначения данных, обозначения фигур и т.д. выполнены с соблюдением математической грамотности (точки обозначают заглавными буквами).

Максимальное количество баллов – 11.

10-11 баллов – графический компонент сформирован (III уровень сформированности).

7-9 баллов – графический компонент сформирован частично или находится в стадии формирования (II уровень сформированности).

0-6 баллов – графический компонент не сформирован (I уровень сформированности).

Результаты диагностики и проведенного эксперимента представлены в таблицах 2.6 – 2.14.

Таблица 2.6

Таблица определения уровня сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в зависимости от комбинации уровней сформированности соответствующих компонентов

<table>
<tr><th>Компоненты</th><th colspan="4">III уровень</th><th colspan="4">II уровень</th><th>I уровень</th></tr>
<tr><td>Статический</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td rowspan="3">Все остальные комбинации</td></tr>
<tr><td>Преобразующий</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Графический</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Таблица 2.7

Результаты диагностики компонентов умения анализировать условие планиметрической задачи на начало эксперимента

<table>
<tr><th rowspan="2">Компонент</th><th rowspan="2">Уровень</th><th colspan="2">Контрольная группа</th><th colspan="2">Экспериментальная группа</th></tr>
<tr><th>Класс «А» (кол-во человек)</th><th>Класс «Б» (кол-во человек)</th><th>Класс «В» (кол-во человек)</th><th>Класс «Г» (кол-во человек)</th></tr>
</table>

Статический	I	12	16	16	13
	II	6	6	5	5
	III	2	2	1	2
Преобразующий	I	15	18	17	15
	II	5	6	5	5
	III	0	0	0	0
Графический	I	13	17	16	11
	II	5	6	5	6
	III	2	1	1	3
Всего человек		20	24	22	20

Таблица 2.8

Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах на начало эксперимента

Сформированность умения анализировать условие планиметрической задачи	**контрольная группа**		**экспериментальная группы**	
	Класс А	**Класс Б**	**Класс В**	**Класс Г**
I уровень	15	19	17	15
II уровень	5	4	4	4
III уровень	0	1	1	1
Σ	**44**		**42**	

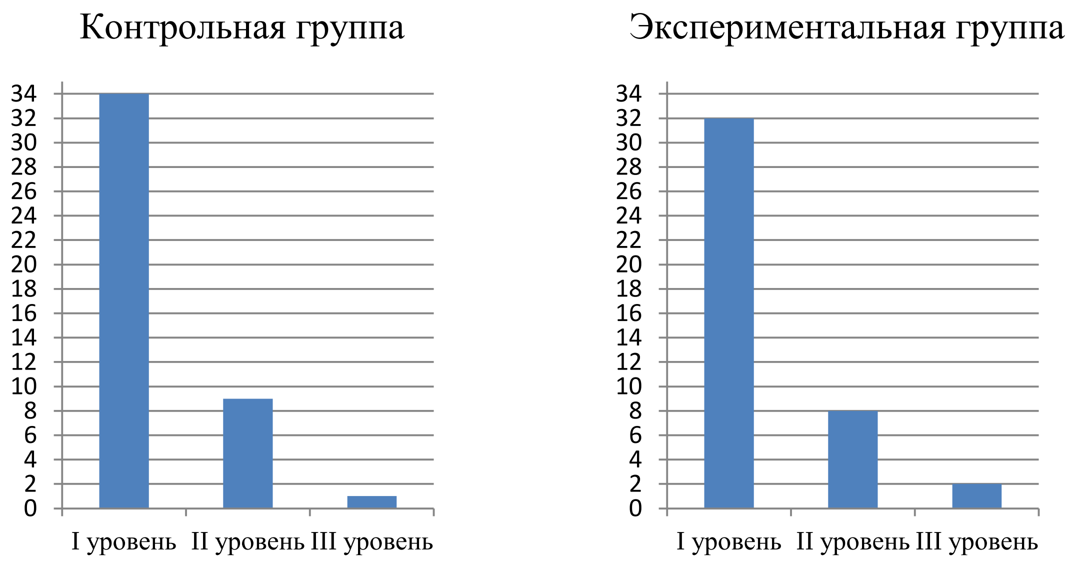


Рисунок 2.25. Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах на начало эксперимента

Таблица 2.9

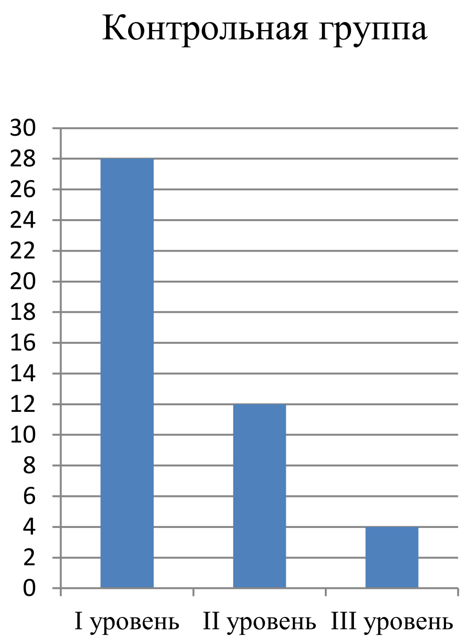
Результаты диагностики компонентов умения анализировать условие планиметрической задачи в середине эксперимента

Компонент	Уровень	Контрольная группа		Экспериментальная группа	
		Класс «А» (кол-во человек)	Класс «Б» (кол-во человек)	Класс «В» (кол-во человек)	Класс «Г» (кол-во человек)
Статический	I	9	12	9	7
	II	8	9	10	10
	III	3	3	3	3
Преобразующий	I	9	14	9	11
	II	11	10	11	8
	III	0	0	2	1
Графический	I	12	12	7	9
	II	6	10	11	7
	III	3	2	4	4
Всего человек		20	24	22	20

Таблица 2.10

Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах в середине эксперимента

Сформированность умения анализировать условие планиметрической задачи	**контрольная группа**		**экспериментальная группы**	
	Класс А	**Класс Б**	**Класс В**	**Класс Г**
I уровень	12	16	12	11
II уровень	6	6	7	6
III уровень	2	2	3	3
Σ	**44**		**42**	



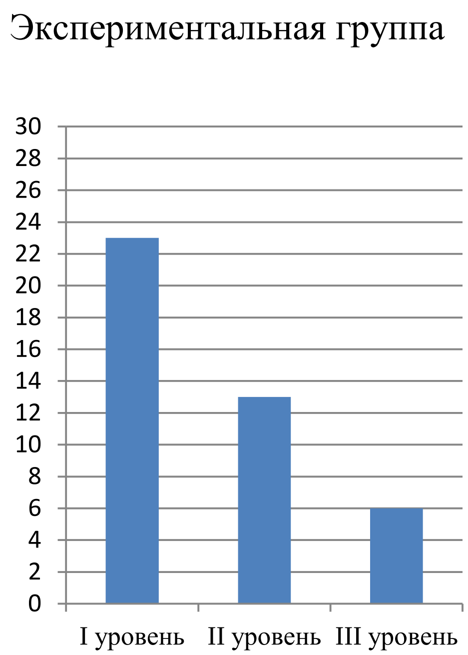


Рисунок 2.26. Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах в середине эксперимента

Таблица 2.11

Результаты диагностики компонентов умения анализировать условие планиметрической задачи на конец эксперимента

Компонент	Уровень	Контрольная группа		Экспериментальная группа	
		Класс «А» (кол-во человек)	Класс «Б» (кол-во человек)	Класс «В» (кол-во человек)	Класс «Г» (кол-во человек)
Стати-ческий	I	2	3	0	0
	II	10	16	9	8
	III	8	5	13	12
Преобразу-ющий	I	6	12	4	2
	II	12	10	12	15
	III	2	2	6	3
Графиче-ский	I	4	5	2	1
	II	12	14	12	10
	III	4	5	8	9
Всего человек		20	24	22	20

Таблица 2.12

Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах на конец эксперимента

Сформированность умения анализировать условие планиметрической задачи	**контрольная группа**		**экспериментальная группы**	
	Класс А	**Класс Б**	**Класс В**	**Класс Г**
I уровень	6	15	4	3
II уровень	9	7	9	9
III уровень	5	2	9	8
Σ	**44**		**42**	

Таблица 2.13

Результаты диагностики компонентов умения анализировать условие планиметрической задачи в экспериментальной группе в 9 «Г» классе

Ученик	Статический компонент		Преобразующий компонент		Графический компонент		Уровень умения анализировать условие планиметрической задачи
	кол-во баллов	уровень	кол-во баллов	уровень	кол-во баллов	уровень	
Азаров Константин	10	II	3	I	7	II	**1**
Азаров Сергей	14	III	5	II	7	II	**2**
Алавердян Даяна	16	III	7	III	11	III	**3**
Белякова Ксения	14	III	6	II	10	III	**3**
Бычков Семен	14	III	5	II	8	II	**2**
Вдовин Григорий	15	III	8	III	10	III	**3**
Ганжа Игорь	15	III	6	II	8	II	**2**
Гирин Богдан	11	II	4	I	7	II	**1**
Дегтярева Анна	16	III	6	II	10	III	**3**
Додина Анастасия	15	III	6	II	11	III	**3**
Зрянин Владимир	10	II	5	II	7	II	**2**
Киреневич Анжелика	15	III	6	II	10	III	**3**
Наумович Иван	10	II	5	II	11	III	**2**
Овчарова Анастасия	11	II	5	II	9	II	**2**
Петров Денис	16	III	6	II	11	III	**3**
Судатова Кристина	14	III	5	II	7	II	**2**
Ханбекова Диляра	12	II	6	II	7	II	**2**
Хлынова Лилия	14	III	6	II	10	III	**3**

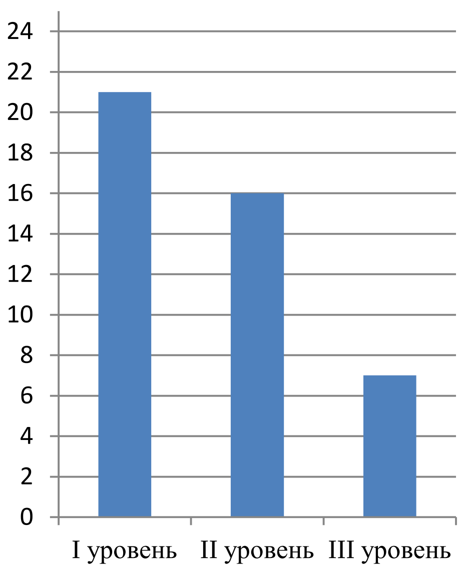
Хуснутдинов Максим	10	II	5	II	4	I	**1**
Фастов Иван	14	II	7	III	8	II	**2**

Таблица 2.14

Итоговая таблица результатов сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах на конец эксперимента

Сформированность умения анализировать условие планиметрической задачи	**контрольная группа**	**экспериментальная группы**
I уровень	21	7
II уровень	16	18
III уровень	7	17
Σ	**44**	**42**

Контрольная группа



Экспериментальная группа

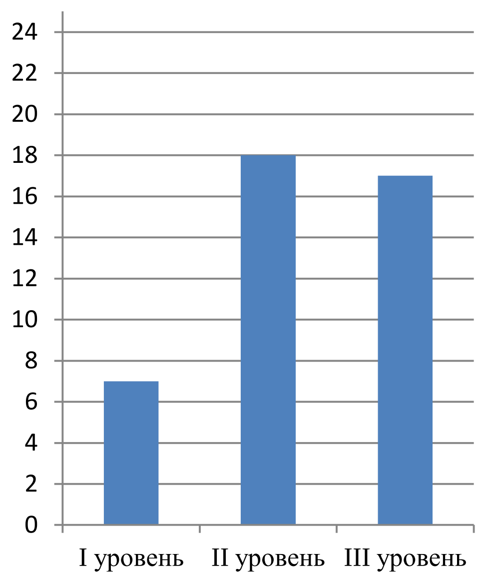


Рисунок 2.27. Результаты сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в контрольной и экспериментальной группах на конец эксперимента

Определим достоверность совпадений и различий для пары экспериментальных данных, измеренных в порядковой шкале с использованием критерия однородности χ^2. При данном уровне значимости проверим нулевую гипотезу H_0: $X_1 = X_2$ об однородности двух выборок. Алгоритм заключается в следующем:

1. Вычислить для двух сравниваемых выборок величину χ^2 – эмпирическое значение критерия χ^2 по формуле (1):

$$\chi^2_{эмп} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i} \qquad (1)$$

2. Сравнить это значение с критическим значением $\chi^2_{cr} = \chi^2_{(L\text{-}1;1\text{-}\alpha)}$, где α – уровень значимости, $\chi^2_{(\upsilon;q)}$ – квантиль распределения Пирсона на уровне q с числом степеней свободы υ.

В результате получаем статистический вывод. Если $\chi^2 > \chi^2_{cr}$, то нулевая гипотеза отвергается, характеристики сравниваемых выборок различаются на уровне значимости α. А если $\chi^2 \le \chi^2_{cr}$, то нулевая гипотеза не отвергается, характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости α.

Статистическую значимость сравниваемых выборок проверяем на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Тогда критическое значение $\chi^2_{\text{cr}} = \chi^2_{(0,05)} = 5,99$.

Для экспериментальной группы вектор баллов есть *n=(7,18,17)*, для контрольной группы вектор баллов *m=(21,16,7).*

Эмпирическое значение:

$$\chi^2_{эмп} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i} = 44 \cdot 42 \cdot \left(\frac{\left(\frac{7}{42} - \frac{21}{44}\right)^2}{7+21} + \frac{\left(\frac{18}{42} - \frac{16}{44}\right)^2}{18+16} + \frac{\left(\frac{17}{42} - \frac{7}{44}\right)^2}{17+7} \right) \approx 11{,}244.$$

как $\chi_{эмп} = 11{,}244$ и $\chi^2_{0,05} = 5{,}99$, следовательно, $\chi_{эмп} > \chi^2_{0,05}$. Нулевая гипотеза отвергается, характеристики сравниваемых выборок различаются на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Это означает, что достоверность различий характеристик экспериментальной и контрольной групп после окончания эксперимента составляет 95%. Следовательно, можно сделать вывод о том, что эффект изменений обусловлен именно применением экспериментальной методики обучения.

Таким образом, итоги диагностической работы показали, что экспериментальная группа лучше справилась с предложенными заданиями, то есть реализуемая нами методика позволила сформировать у учащихся основной школы умение анализировать условие планиметрической задачи.

Выводы второй главы

1. Под методикой обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи будем понимать строго определенное педагогическое воздействие, направленное на обучение учащихся анализу условия планиметрических задач и проявляющееся при реализации целей и содержания курса планиметрии в 7–9-ых классах. Методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи строится в соответствии с этапной моделью формирования умения анализировать условие планиметрической задачи и представлена целевым (иерархия целей), содержательным (системы задач в соответствии с этапами формирования умения анализировать условие планиметрической задачи**)** и процессуальным (методы и формы организации учебной деятельности школьников на этапе понимания условия планиметрической задачи) компонентами.

2. Целевой компонент методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи представлен глобальной (формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи), фазовыми (отражают динамику умения анализировать условие планиметрической задачи в рамках учебных тем),

оперативными (достижимы при решении конкретной планиметрической задачи, в условиях диалога и пр.) и интегративной (формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие любых задач) целями.

3. Содержательный компонент методики определяет компонентная система задач. Выделим требования к компонентной системе задач как к средству формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи:

1) целевой критерий отбора задач в систему – формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

2) в компонентную систему задач необходимо включить задачи в соответствии со структурой умения, с целью формирования каждого его компонента.

4. Специфику процессуального компонента методики отражают такие методы организации обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи, как наглядные (изображение чертежа к задаче, работа на готовых чертежах), практические (построение чертежа и его изменение), индукция и дедукция (выведение основных геометрических закономерностей – основа анализа условия планиметрической задачи), проблемно-поисковые (учебные ситуации на выявление связей между условиями и требованиями задачи).

5. В опытно-экспериментальной работе приняли участие 280 человек, среди которых 50 учителей математики Волгограда и Волгоградской области. Опытно-экспериментальная работа представлена *констатирующим*, *поисковым* и *формирующим* экспериментами.

В ходе *констатирующего эксперимента* (2012 – 2015 г.) диагностировались учителя математики на базе Волгоградской государственной академии повышения квалификации и переподготовки работников образования (50 человек), ученики 8-9 классов Городищенской МБОУ СОШ №1 и студенты 5 курса ВГСПУ факультета МИФ (74 респондента). Эксперимент констатировал проблему формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи.

В ходе *поискового эксперимента* (2015 – 2018 г.), в котором приняли участие учащиеся 7-9 классов МБОУ Городищенской СОШ №1 (70 человек), анализировались методические подходы формирования у учащихся умения анализировать условие планиметрической задачи, апробировались отдельные компонентные системы задач и требования к ним, уточнялась гипотеза исследования. В результате были выделены следующие ***дидактические условия эффективности методики*** обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи:

– включение в содержание школьного курса планиметрии компонентной системы задач;

– овладение учителем математики методикой обучения учащихся анализировать условие планиметрической задачи;

– реализация основных положений деятельностного подхода в процессе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

– включение в систему знаний учащихся эвристик по анализу условия планиметрической задачи;

– вовлечение учащихся в деятельность составления компонентной системы задач.

Формирующий эксперимент (2018 – 2021 г.) был организован и проведен в естественных условиях учебного процесса на уроках геометрии с учащимися 8-9 классов (86 человек) МБОУ «ГСОШ №1 Городищенского района Волгоградской области»: экспериментальная группа – 42 человека, контрольная группа – 44 человека. Была доказана эффективность предложенной методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема недостаточной разработанности теоретико-методических основ организации деятельности учащихся на этапе анализа условия планиметрической задачи является открытой, требующей решения на всех этапах обучения геометрии в школе, что доказывает актуальность диссертационного исследования, целью которого является разработка методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи. Данная цель была конкретизирована в четырех задачах исследования. Остановимся на кратком решении задач исследования.

В ходе решения *первой задачи* исследования были выявлены приемы анализа условия планиметрической задачи, после чего была проведена их классификация на основе характера получаемой информации – явной (констатация данных, неизвестных и искомых) и неявной (установление связей между элементами задачи).

Основным приемом установления связей между структурными элементами планиметрической задачи является варьирование, при котором изменение одного элемента определяет следование или изменение другого. Варьирование заключается как в переформулировании задачи, так и в её изменении (замена числовых данных, объектов и/или отношений, добавление и/или изъятие условий, требований). При этом сконструированные задачи сравниваются с данной, что приводит к установлению связей между изменяемыми элементами задачи. Предельными случаями варьирования могут быть задачи с несформированным требованием или условием. Первые позволят учащимся вывести следствия из условия задачи (сформулировать требования), вторые – найти достаточные условия для выполнения требования.

Решением *второй задачи исследования* стали структурная, уровневая и этапная модели умения учащихся основной школы анализировать условие планиметрической задачи.

В основе структурной модели умения анализировать условие планиметрической задачи лежит классификация приемов получения информации на первом этапе решения задачи.

Умение анализировать условие планиметрической задачи состоит из комплекса различных умений, разделенных на группы:

- ✓ умения, позволяющие получить информацию из условия задачи без его непосредственного изменения, –статические;
- ✓ умения, позволяющие получить информацию из условия задачи при его изменении (варьировании), – преобразующие;
- ✓ умения, связанные с графической интерпретацией задачи, – графические.

Для определения сформированности каждого из компонентов умения были выделены критерии и разработана диагностика. Выделены четыре уровня сформированности умения анализировать условие планиметрической задачи в зависимости от совокупности знания о структуре задачи, методах и приемах анализа условия планиметрических задач, полноты учета конкретных условий задачной ситуации, сформированности навыков построения чертежа, отвечающего условию задачи.

Формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи проходит три последовательных этапов, отличающихся целями (адаптировать умения анализировать условия алгебраических задач к анализу условия планиметрических задач; сформировать приемы анализа условия планиметрических задач; сформировать умение анализировать условие нестандартизированных задач) и основными средствами формирования.

В ходе решения *третьей задачи исследования* разработаны блоки методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Целевой компонент методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи представлен глобальной (формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи), фазовыми (отражают динамику умения анализировать условие планиметрической задачи в рамках учебных тем), оперативными (достижимы при решении конкретной планиметрической задачи, в контексте целей урока и пр.) и интегративной **(**формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие любых задач) целями.

Содержательный компонент методики определяет компонентная система задач, соответствующая требованиям:

1) целевой критерий отбора задач в систему – формирование у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

2) в компонентную систему задач необходимо включить задачи в соответствии со структурой умения, с целью формирования каждого его компонента.

Компонентная система задач представлена задачами на осознание смысла слов, входящих в формулировку задачи, на распознавание известных элементов в различных сочетаниях, на преобразование формулировки в равносильное, обратными и нестандартизированными задачами, на отработку ключевой идеи (переосмысление элементов фигуры с точки зрения другого понятия), на нахождение ошибки в чертеже, на составление условия по чертежу, на варьирование чертежа.

Специфику процессуального блока методики отражают такие методы организации обучения учащихся анализу условия планиметрической задачи, как наглядные (изображение чертежа к задаче, работа на готовых чертежах), практические (построение чертежа и его изменение), индукция и дедукция (выведение основных геометрических закономерностей – основа анализа условия планиметрической задачи), проблемно-поисковые (учебные ситуации на выявление связей между условиями и требованиями задачи).

В ходе решения *четвертой задачи исследования* доказана эффективности методики обучение учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

Выделены дидактические условия эффективности методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи:

– включение в содержание школьного курса планиметрии компонентной системы задач;

– овладение учителем математики методикой обучения учащихся анализировать условие планиметрической задачи;

– реализация основных положений деятельностного подхода в процессе формирования у учащихся основной школы умения анализировать условие планиметрической задачи;

– включение в систему знаний учащихся эвристик по анализу условия планиметрической задачи;

– вовлечение учащихся в деятельность составления компонентной системы задач.

Результаты формирующего эксперимента в рамках опытно-экспериментальной работы подтверждают эффективность авторской методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи, отличительной особенностью которой является использование системы задач, нацеленной на выявление информации о структурных элементах задачи и связях между ними.

Полученные результаты исследования подтвердили выдвинутую гипотезу, а также доказали возможность практического применения разработанной в диссертации методики обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулина, О. А. Общепедагогическая подготовка учителя в системе педагогического образования: для пед. спец. вузов / О. А. Абдулина. – Москва : Просвещение, 1989. – 139 с.

2. Автономова, Т. В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии / Т.В. Автономова, Б. И. Аргунов. – Москва : Просвещение, 1988. – 128 с.

3. Александров, А. Д. Диалектика геометрии / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1986. – №1. –С. 12–18.

4. Алексеева, Е. Е. Обучение составлению геометрических задач по требованию на примере задач на построение треугольника / Е. Е. Алексеева // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика: сб. материалов VI Международной научно-практической конференции. – Казань, 2016. – С. 172-176.

5. Ананьев, Б. Г. Избранные психологические труды. Том I / Б. Г. Ананьев. – Москва : Педагогика, 1980. – 232 с.

6. Артемов, А. К. Методологические основы методики формирования математических умений школьников: автореф. дис. … д-ра пед. наук / А. К. Артемов. – Москва, 1985. – 36 с.

7. Астахова, Н. А. Методика обучения будущих учителей математики составлению задач: дис. ... канд. пед. наук / Н. А. Астахова. − Волгоград, 2009. – 169 с.

8. Астряб, А. М. Почему трудно решать геометрические задачи на вычисление / А. М. Астряб // Математика в школе. – 2009. – № 5. – С. 58–65.

9. Атанасян, Л. С. Геометрия: учебник для 7-9 кл. сред. шк. / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – Москва : Просвещение, 1992. – 335 с.

10. Афанасьев, В. Г. Системность и общество / В. Г. Афанасьев. – Москва : Политиздат, 1980. – 368 с.

11. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды / Ю. К. Бабанский. – Москва : Педагогика, 1989. – 560 с.

12. Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – Москва : Педагогика, 1990. – 184 с.

13. Баранова, Е.В. Методика использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: автореф. дис. … канд. пед. наук / Е. В. Баранова. – Омск, 2003. – 22 с.

14. Батракова, И. С. Теоретические основы организации педагогического процесса в современной школе: автореф. дис. … д-ра пед. наук / И. С. Батракова. – Санкт - Петербург, 1995. – 37 с.

15. Белов С.В. Формирование профессиональных компетенций у студентов педагогического университета при изучении дисциплины «Геометрия» / С.В. Белов // Научный поиск. – 2017. – № 4(26).

16. Бескин, Н. М. Методика геометрии / Н. М. Бескин. – Москва : УЧПЕДГИЗ, 1947. – 278 с.

17. Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – Москва : Педагогика, 1982. – 192 с.

18. Боженкова, Л. И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии: монография / Л. И. Боженкова. – Калуга : Изд-во КГПУ им. К. Э. Циолковского, 2007. – 281 с.

19. Бойко, Е. И. Еще раз об умениях и навыках / Е. И. Бойко // Вопросы психологии. – 1957. – № 1. – С. 133— 139.

20. Ботвинников, А. Д. Научные основы формирования графических знаний, умений и навыков школьников / А. Д. Ботвинников. – Москва : Педагогика, 1979. – 255 с.

21. Бурлакова, Т. В. Методические приемы организации учебной деятельности школьников в процессе решения арифметических задач / Т. В. Бурлакова, И. Б. Румянцева, И. И. Целищева // III Всероссийская заочная научно-практическая конференция «Стратегия развития современной

сельской школы в условиях реализации ФГОС: проблемы и перспективы». – 2017. – С. 73-77.

22. Виленкин, Н. Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты / Н. Я. Виленкин // Математика в школе. – 1988. – №4. – С. 7–14.

23. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов вузов / Л. В. Виноградова. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2005. – 252 с.

24. Воробьев, Н. В. Умозаключение по аналогии / Н. В. Воробьев. – Москва : Изд-во МГУ, 1963. – 26 с.

25. Воробьева, Н. Г. Формирование познавательной активности учащихся в процессе решения геометрической задачи : автореф. дис. … канд. пед. наук / Н. Г. Воробьева. – Москва, 1989. – 16 с.

26. Волкова, Н. Д. Исследовательская деятельность учащихся при изучении геометрии как средство развития их творческого мышления : автореф. дис. канд. пед. наук / Н. Д. Волкова. – Киев, 1972. – 21 с.

27. Владимирский, Г. А. Каким должен быть чертеж преподавателя геометрии / Г. А. Владимирский // Математика в школе. – 1998. – № 4. – С. 72–78.

28. Владимирский, Г. А. Система упражнений на графическом материале в преподавании геометрии : дис. … канд. пед. наук / Г. А. Владимирский. – Москва : Акад. пед. наук, 1947. – 280 с.

29. Воистинова, Г. Х. Задачи на построение как средство формирования приемов мыслительной деятельности учащихся основной школы : дис. … канд. пед. наук / Г. Х. Воистинова. – Москва, 2000. – 183 с.

30. Воронько, Т. А. Дидактическая роль теоретических знаний в развитии пространственных представлений учащихся при изучении стереометрии : автореф. дис. … канд. пед. наук / Т. А. Воронько. – Москва, 1992. – 16 с.

31. Выготский, Л. С. Педагогическая психология / Л. С. Выготский. – Москва : Педагогика, 1991. – 479 с.

32. Габович, И .Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач / И. Г. Габович. – Москва : Просвещение, 1996. – 192 с.

33. Гальперин, П. Я. Введение в психологию / П. Я. Гальперин. – Москва : Изд-во МГУ, 1988. – 289 с.

34. Гингулис, Э. Ж. Методика развития математических способностей учащихся 6-8 классов в ходе решения геометрических задач : дис. … канд. пед наук / Э. Ж. Гингулис. – Москва,1988. – 170 с.

35. Глыва, Г. Н. Формирование обобщенных умений решать геометрические задачи у учащихся 6-8 классов : автореф. дис. … канд пед. наук. – Киев, 1988. – 22 с

36. Гольдберг, Я. Е. С чего начинать решение стереометрической задачи: Пособие для учителя / Я. Е. Гольдберг. – Киев : Рад. шк., 1990. – 117 с.

37. Готман, Э. Г. Задача одна решения разные / Э. Г. Готман, З. А. Скопец. – Киев : Род. шк., 1988. – 173 с.

38. Готман, Э. Г. Правильное решение геометрической задачи // Квант. –1987. – №5. – С. 50-55.

39. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – Москва: Педагогика, 1977. – 136 с.

40. Гришина, Ю. О. Приемы организации учебной деятельности школьников на этапе понимания условия планиметрической задачи / Ю.О. Гришина // VI Международная студенческая электронная научная конференция «Студенческий научный форум». – 2014. – Режим доступа: http://www.scienceforum.ru/2013/pdf/5379.pdf

41. Груденов, Я. И. Поиск решения задачи / Я.И. Груденов // Квант. – 1973. – №12. – С. 39–44.

42. Груденов, Я .И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя / Я. И. Груденов. – Москва: Просвещение, 1990. – 224 с.

43. Губа, С. Г. Развитие у учащихся интереса к поиску и исследованию математических закономерностей / С.Г. Губа // Математика в школе. – 1972. – №3. – С. 19–22.

44. Гурова, Л. Л. Психологический анализ решения задач / Л. Л. Гурова. – Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1976. – 321 с.

45. Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – Москва: Академия, 2003. – 428 с.

46. Гусев, В. А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина и др. – Москва: Академия, 2004, – 368 с.

47. Гуревич, С.В. Методика построения чертежа к геометрической задаче при изучении геометрии, основанной на идеях фузионизма : дис. … канд. пед. наук / С. В. Гуревич. – Москва, 1997. – 174 с.

48. Давыдов, В. В. Виды обобщения в обучении / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогика, 1972. – 423 с.

49. Давыдов В. В. Психологический словарь / В. В Давыдов, В. П. Зинченко и др. – Москва: Педагогика, 1983. – 448 с.

50. Давыдов, В. В. Проблемы развивающего обучения / В. В. Давыдов. – Москва : ИНТОР, 1996. – 544 с.

51. Далингер, В. А. Основные направления совершенствования подготовки учителя математики в педагогических вузах / В. А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. − № 5 – С. 70-72.

52. Далингер, В. А. Метод аналогии как средство обучения учащихся стереометрии : учеб. пособие / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 1998. – 67 с.

53. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач : учеб. пособие / В. А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. – 365 с.

54. Далингер, В. А. Об аналогиях в планиметрии и стереометрии / В. А. Далингер // Математика в школе. 1995. –№6. – С. 16-21.

55. Далингер, В. А. Обучение учащихся доказательству теорем : учеб. пособие / В.А. Далингер. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2002. – 419 с.

56. Далингер, В. А. Чертеж учит думать / В. А. Далингер // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 32 – 36.

57. Данилов, М. А. Дидактика / М. А. Данилов – Москва : АПН РСФСР, 1957. – 517 с.

58. Данильчук, Е. В. Методическая система формирования информационной культуры будущего педагога : дис. ... доктора пед. наук / Е. В. Данильчук. – Волгоград, 2003. – 354 с.

59. Данилова, Е. Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач / Е. Ф. Данилова. – Москва : Учпедгиз, 1958. – 96 с.

60. Дербеденева, Н. Н. Практико-ориентированные задачи как основа формирования мотивации у школьников к изучению геометрии в основной школе / Н. Н. Дербеденева, С. Н. Дорофеев, Р. А. Утеева // Гуманитарные науки и образование. – 2019. – Т. 10. – № 4(40). – С. 36–42.

61. Домкина, Г. В. В одной задаче почти вся планиметрия / Г. В. Домкина, Т. А. Лаптева // Математика. – 1999. – № 40. – С.28-30.

62. Дорофеев, С. Н. Методические особенности обучения старшеклассников распознаванию геометрических образов / С. Н. Дорофеев, Н. В. Наземнова // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(32). – С. 77–88.

63. Дорофеев, Г. В. О составлении циклов взаимосвязанных задач / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С.34-36.

64. Дюмина, Т. Ю. Содержательный компонент методической системы обучения будущих учителей математики конструированию систем задач : дис. … канд. пед. наук / Т. Ю. Дюмина. – Волгоград, 2006. – 192 с.

65. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в средней школе / О. Б. Епишева. – Тобольск : Изд-во ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 1997. – 191 с.

66. Жучков, В. М. Теоретические основы концепции модернизации предметной области «Технология» для педагогических вузов: монография / В. М. Жучков. — СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2001. — 246 с.

67. Загвязинский, В. И. Методология и методика дидактического исследования / В. И. Загвязинский. — Москва : Педагогика, 1982. — 158 с.

68. Загузов, Н. И. Технология подготовки и защиты кандидатской диссертации / Н. И. Загузов. – Москва, 1998. – 114 с.

69. Зайцева, Г. Д. Развитие навыков решения стереометрических задач / Г. Д. Зайцева // Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 40–42.

70. Занков, Л. В. О предмете и методах дидактических исследований / Л. В. Занков. – Москва : АПН РСФСР, 1962. – 148 с.

71. Зверева, А. Т. Задачи как средство формирования и развития графических умений при обучении планиметрии : автореф. дис. … канд. пед. наук / А. Т. Зверева. – Москва, 1989. – 16 с.

72. Зверева, М. В. О понятии «дидактические условия» / М. В. Зверева // Новые исследования в педагогических науках. – 1987. – № 1. – С. 29–32.

73. Зимняя, И. А. Педагогическая психология : учебник для вузов / И. А. Зимняя. − 2-е изд., испр., доп. и перераб. – Москва : Логос, 2005. – 383 с.

74. Зыкова, В. И. Оперирование понятиями при решении геометрических задач / В. И. Зыкова // Вопросы психологии обучения. – 1950. – № 28. – С. 155–195.

75. Зыкова, В. И. Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний / В. И. Зыкова. – Москва : Учпедгиз, 1955. – 164 с.

76. Зыкова, В.И. Формирование практических умений на уроках геометрии / В. И. Зыкова. – Москва, 1963. – 200 с.

77. Иванов, О. А. Обучение поиску решения задач / О. А. Иванов // Математика в школе. – 1997. – №6. – С. 47–52.

78. Иванова, Т. А. Методика работы с задачей на уроке математики в контексте ФГОС ООО нового поколения / Т. А. Иванова, И. В. Ульянова // Подготовка будущего учителя к проектированию современного урока : Монография / Под редакцией Н. В. Кузнецовой, Е. В. Белоглазовой. – Саранск : Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева, 2016. – С. 207–225.

79. Игошин, В. И. Логика и интуиция в математическом образовании / В. И. Игошин // Педагогика. – 2002. – №9. – С. 40–46.

80. Изаак, Д. Ф. Изображение геометрических фигур в средней школе : автореф. дис. … канд. пед. наук / Д. Ф. Изаак. – Москва, 1961. – 15 с.

81. Изаак, Д.Ф. Возникновение новых задач при исследовании задач по геометрии / Д. Ф. Изаак // Математика в школе. – 1998. – №2. – С.84–87.

82. Изаак, Д. Ф. Поиски решения геометрической задачи /Д. Ф. Изаак // Математика в школе. – 1998. – №6. – С. 30–34.

83. Ильин, В. С. Целостный процесс формирования всесторонне развитой и гармоничной личности, его строении / В. С. Ильин // Целостный подход в учебно-воспитательном процессе: сб. науч. тр. – Волгоград : ВГПИ, 1984. – 176 с.

84. Ильина, Т. А. Педагогика: Курс лекций : Учебное пособие для студентов пединститутов / Т. А. Ильина. – Москва : Просвещение, 1984. – 496 с.

85. Кабанова-Меллер, Е. Н. Роль обобщений в переносе / Е. Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии. – 1972. – №2.– С. 55–56.

86. Кабанова-Меллер, Е. Н. Роль образа в решении задач / Е. Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии. – 1970. – № 5. – С. 122–131.

87. Кабанова-Меллер, Е. Н. Роль чертежа в применении геометрических теорем / Е. Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии обучения. – 1950. – № 28. – С. 195–227.

88. Кабанова-Меллер, Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. – Москва : Знание, 1981. – 96 с.

89. Канин, Е. С. Заключительный этап решения учебных задач / Е. С. Канин, Ф. Ф. Нагибин // Преподавание алгебры и геометрии в школе: пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1982. – С. 131-138.

90. Капкаева, Л. С. Обучение моделированию учащихся 8 класса в процессе решения текстовых задач / Л. С. Капкаева, А. С. Лигеева // Современные тренды математики и математического образования : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Саранск: Мордовский государственный педагогический университет имени М.Е. Евсевьева, 2020. – С. 26-34.

91. Капкаева, Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика. Часть 1 : учеб. пособие / Л. С. Капкаева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2020. – 264 с.

92. Карпушина, Н. М. Динамические задачи в обучении геометрии / Н. М. Карпушина // Математика в школе. – 2006. – №3. – С. 48– 54.

93. Ковалева, Г.И. Методическая система обучения будущих учителей математики конструированию систем задач: дис. … д-ра пед. наук / Г. И. Ковалева. – Волгоград, 2012. – 356 с.

94. Ковалева, Г. И. Теория и методика обучения математике: конструирование систем задач / Г. И. Ковалева, Н. А. Астахова, Т. Ю. Дюмина. – Волгоград : Перемена, 2008. – 156 с.

95. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – Москва : Просвящение, 1975. – 462 с.

96. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математики. Часть I / Ю. М. Колягин. – Москва : Просвещение, 1977. – 113 с.

97. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математики. Часть II / Ю. М. Колягин. – Москва : Просвещение, 1977. – 145 с.

98. Кондратьева, Е. В. Обучение школьников работе с чертежом в процессе решения планиметрических задач : дис. … канд. пед. наук / Е. В. Кондратьева. – Пенза, 2002. – 168 с.

99. Кононенко, Н. В. Система задач как средство формирования конструктивных умений учащихся в процессе изучения курса планиметрии: дис … канд. пед. наук / Н. В. Кононенко. – Чита, 2002. – 167 с.

100. Краевский, В. В. Методология педагогического исследования: пособие для педагога исследователя / В. В. Краевский. – Самара : СамГПИ, 1994. – 165 с.

101. Крупич, В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В. И. Крупич. – Москва : Прометей, 1995. – 166 с.

102. Кулюткин, Ю. Н. Эвристические методы в структуре решений / Ю. Н. Кулюткин. – Москва : Педагогика, 1970. – 232 с.

103. Кузьмина, Н. В. Понятие «педагогическая система» и критерии ее оценки / Н. В. Кузьмина. – Ленинград : ГДОИФК, 1980. – 165 с.

104. Кушнир, И. А. Об исследовании неопределенности в геометрических задачах / И. А. Кушнир // Математика в школе. – 1998. – № 1. – С. 69–71.

105. Ларькина, Е. В. Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии: дис. .канд. пед. наук. – Москва, 1996. – 256 с.

106. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – Москва : Политиздат, 1977. – 304 с.

107. Леонтьев, А. Н. Лекции по общей психологии / А. Н. Леонтьев. – Москва : Смысл, 2000. – 511 с.

108. Лернер, И. Я. Процесс обучения и его закономерности / И. Я. Лернер. – Москва : Знание, 1980. – 93 с.

109. Лоповок, Л.М. Методика отбора упражнений по геометрии и обучение их решению / Л. М. Лоповок // кн: Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы. – Москва : Просвещение, 1967. – 157–199 с.

110. Ляпин, С. Е. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С. А. Гастеева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин, М. М. Шидловская. – Москва : Просвещение, 1965. – 743 с.

111. Мамонтова, Т. С. Формирование профессионально-методической компетентности будущего учителя математики в педвузе средствами курса «Теория и методика обучения математике»: дис. ... канд. пед. наук / Т. С. Мамонтова. – Ишим, 2009. – 233 с.

112. Маркова, А. К. Формирование мотивации учения. Книга для учителя / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – Москва : Просвещение, 1990. – 192 с.

113. Маслова, О.А. Диагностика уровня сформированности у будущих учителей математики умения работать со структурой математических утверждений при изучении курса математической логики учителя / О.А. Маслова // Научная дискуссия: вопросы педагогики и психологии: сборник статей XXX Международной заочной конференции. – 2014. – №9 (30). – С. 32–38.

114. Маслова, О. А. Методика обучения будущих учителей математики работе со структурами математических утверждений: на примере дисциплины «Математическая логика»: дис. … канд. пед. наук / О. А. Маслова. – Волгоград, 2015. – 154 с.

115. Машбиц, Е. И. Место задачи в деятельности / Е. И. Машбиц // Теория задач и способов их решения. – 1973. – С. 3–13.

116. Мишин, В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / В. И. Мишин, А. Я. Блох, В. А. Гусев и др. – Москва : Просвещение, 1987. – 416 с.

117. Моденов, П. С. Задачи по геометрии / П. С. Моденов. – Москва : Наука, 1979. – 368 с.

118. Монахов, В. М. Педагогическое проектирование – современный инструментарий дидактических исследований / В. М. Монахов // Шк. технологии. – 2001. – №5. – С. 75–89.

119. Новиков, Д. А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) / Д. А. Новиков. – Москва : МЗ-Пресс, 2004. – 67 с.

120. Новиков, А.М. Методология образования. Издание второе / А. М. Новиков. — Москва : Эгвес, 2006. — 488 с.

121. Ольбинский, И. Б. Развитие задачи / И. Б. Ольбинский // Математика в школе. – 1998. – №2. – С. 15–16.

122. Орлов, В. И. Процесс обучения: средства и методы / В. И. Орлов. – Москва, 1996. – 164 с.

123. Погорелов, А. В. Геометрия. Учебник для 7-11 кл. сред. шк. / А. В. Погорелов. – Москва : Просвещение, 2001. – 383 с.

124. Подласый, И. П. Педагогика: 100 вопросов – 100 ответов: учеб. пособие для вузов / И. П. Подласый. – Москва : ВЛАДОС-пресс, 2004. – 365 с.

125. Пойа, Д. Как решать задачу. Пособие для учителей / Д. Пойа. – Москва : Учпедгиз, 1961. – 206 с.

126. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп / В. В. Просолов. – Москва : МЦНМО, 2006. – 640 с.

127. Протасов, И. Ф. Обучение школьников приемам работы с учебным материалом по геометрии (чтение чертежа и составление плана решения задачи): автореф. дис. … канд. пед. наук / И. Ф. Протасов. – Калинин, 1971. – 19 с.

128. Рощина, Н.А. О воспитании эстетического вкуса учащихся при решении планиметрических задач // Математика в школе. – 1997. – №2. – С. 4– 8.

129. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – Москва : Педагогика, 1976. – 416 с.

130. Румянцева, И. Б. Математика. 1-6 классы. Формирование навыков работы с текстовыми задачами / И.Б. Румянцева, И.И. Целищева, Т.В. Бурлакова, С.А. Зайцева // Москав : Илекса, 2015. – 179 с.

131. Саранцев, Г. И. Сборник задач на геометрические преобразования / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 1981. – 112 с.

132. Саранцев, Г. И. Составление геометрических задач на заданных чертежах / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 1993. – № 6. – С. 14–16.

133. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2002. – 224 с.

134. Селютин, В. Д. Варьирование математической задачи как средство овладения студентами теорией вероятностей / В. Д. Селютин, Н. Н. Яремко // Образование и общество. – 2021. – № 2(127). – С. 55-60.

135. Семенов, Е. Е. Размышления об эвристиках / Е. Е. Семенов // Математика в школе. – 1995. – №5. – С. 39–43.

136. Семенов, Е. Е. Не теряя время попусту / Е. Е. Семенов // Математика в школе. – 1993. – №5. – С. 57–59.

137. Семенов, Е.Е. Изучаем геометрию: кн. для учащихся сред. шк. / Е. Е. Семенов. – Москва : Просвещение, 1987. – 254 с.

138. Сергеев, Н. К. Теория и практика становления педагогических комплексов в системе непрерывного образования учителя: дис. в виде науч. докл. … д-ра пед. наук / Н. К. Сергеев. – Волгоград, 1998. – 79 с.

139. Силаев, Е. В Теоретические основы методической подготовки будущего учителя к преподаванию школьного курса геометрии / Е. В. Силаев. – Москва, 1996. – 246 с.

140. Скарбич, С. Н. Формирование у учащихся умения составлять планиметрические задачи на основе данной задачи / С. Н. Скарбич // Образовательные технологии. – 2005. – №4. – С.74–78.

141. Скаткин, М. Н. Проблемы современной дидактики. 2 –е изд. / М. Н. Скаткин. – Москва : Педагогика, 1984. – 96 с.

142. Скопец, З. А. Геометрические миниатюры / Сост. Г. Д. Глейзер. – Москва : Просвещение, 1990. – 224 с.

143. Сластенин, В. А. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов. – Моква : Академия, 2002. – 576 с.

144. Смирнов, Е. И. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учебное пособие / Е. И. Смирнов. – Ярославль : ИПК «Индиго», 2007. – 454 с.

145. Смыковская, Т. К. Технология проектирования методической системы учителя математики и информатики: монографии / Т. К. Смыковская. – Волгоград : Бланк, 2000. – 250 с.

146. Соколов, В. Н. Педагогическая эвристика: учеб. пособие / В. Н. Соколов. – Москва : Аспект-пресс, 1995. – 254 с.

147. Стефанова, Н. Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова. – Москва : Дрофа, 2005. – 416 с.

148. Столяр, А. А. Логические проблемы преподавания математики: учебное пособие для педагогических вузов / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1965. – 254 с.

149. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1986. – 414 с.

150. Страчевский, Э. А. Составление задач по математике как средство активизации мыслительной деятельности учащихся 7-10 классов: автореф. дис. … канд. пед. наук / Э. А. Старчевский. – Петрозаводск, 1972. – 16 с.

151. Тарасова, О. В. Роль наглядной геометрии в обеспечении преемственности при обучении математике // Начальная школа. – 2001. –– №5. – С.57-60

152. Тихомиров, В. М. Геометрия в современной математике и математическом образовании / И. М. Тихомиров // Математика в школе. 1993. – №4. – С. 3–9.

153. Туманов, С. И. Поиски решения задачи / С. И. Туманов. – Москва : Просвещение, 1969. – 280 с.

154. Ульянова, И. В. Метод варьирования задачи как средство развития творческой математической деятельности учащихся / И. В. Ульянова, Д. А. Косарева // Учебный эксперимент в образовании. – 2019. – № 3(91). – С. 43–48.

155. Усова А. В. Проблемы теории и практики обучения в современной школе / А. В. Усова. – Челябинск, 2000. – 221 с.

156. Усова А. В. Методология научных исследований: Курс лекций / А. В. Усова. – Челябинск : ЧГПУ, 2004. – 130 с.

157. Утеева, Р. А. Хрестоматия по методике математики: обучение через задачи / Р. А. Утеева // Математика в школе. – 2009. – № 1. – С. 79–80.

158. Фетисов А. И. Геометрия в задачах / А. И. Фитисов. – Москва : Просвещение, 1977. – 192 с.

159. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи: пособие для учителя. 2 изд. перераб. и доп. / Л. М. Фридман. – Москва : Просвещение, 1984. – 192 с.

160. Фридман, Л.М. Методика обучения решению математических задач // Математика в школе, 1991. – №5. – С. 59.

161. Харламов, И. Ф. Педагогика : Учеб. пособие. / И. Ф. Харламов. – Москва : Гардарики, 2003. – 519 с.

162. Хотченкова, Е. А. Развитие логического мышления школьников средствами учебного предмета «Математика»: дис. … канд. пед. наук / Е. А. Хотченкова. – Ставрополь, 2006. – 191 с.

163. Хуторской, А. В. Современная дидактика: учебник для вузов / А. В. Хуторской. – Санкт-Петербург : Питер, 2001. – 544 с.

164. Цукарь, А. Я. Дополнительная работа над задачей / А. Я. Цукарь // Математика в школе. – 1982. – №1. – С. 42–44.

165. Цукарь, А.Я. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием образного мышления: дис. ... д-ра пед. наук / А. Я. Цукарь. – Новосибирск, 1999. – 430 с.

166. Цукарь, А.Я. О типологии математических задач / А.Я. Цукарь // Современные проблемы обучения математике: сб. ст. – Москва : Просвещение, 1985. – С. 132–139.

167. Черепанова, Т. П. Обучение варьированию условия задачи средство активизации мыслительной деятельности учащихся / Т. П. Черепанова // Математика в школе. – 1964. – №5. – С. 36–39.

168. Черкасов, Р.С. Методика преподавания математики в средней школе / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – Москва : Просвещение, 1985. – 336с.

169. Чистякова, Л. С. Методика формирования и развития практических умений и навыков учащихся 6-8 классов при обучении геометрии: автореф. дис. … канд. пед. наук / Л. С. Чистякова. – Москва, 1987. – 15 с.

170. Чичигин, В. Г. Методика преподавания геометрии / В. Г. Чичигин. – Москва : УЧПЕДГИЗ, 1959. – 392 с.

171. Шарыгин, И. Ф. Задачи по геометрии: планиметрия / И. Ф. Шарыгин. – Москва : Наука,1982. – 160 с.

172. Шарыгин, И. Ф. Откуда берутся задачи / И. Ф. Шарыгин // Квант. – 1991. – №9. – С. 42–50.

173. Шатилова, А. В. Обучение школьников составлению задач по готовому чертежу: автореф. дис. … канд. пед. наук / А. В. Шатилова. – Саранск, 1997. – 18 с.

174. Шоленкова, С. П. Формирование системы задач для курса информатики факультета педагогики и методики начального образования педагогического вуза : дис. … канд. пед. наук / С. П. Шоленкова. – Москва, 2000. – 146 с.

175. Эльконин, Д. Б. Психология обучения младшего школьника / Д. Б. Эльконин. – Москва : Знание, 1974. – 315 с

176. Эрдниев П. М. Сравнение и обобщение при обучении математике / П. М. Эрдниев. – Москва : Учпедгиз, 1960. – 152 с.

177. Эрдниев, П. М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – Москва : Просвещение, 1986. – 255 с.

178. Эрдниев, П. М. Аналогия в математике / П. М. Эрдниев. – Москва : Знание, 1971. – 86 с.

179. Эсаулов, А. Ф. Психология решения задач / А.Ф. Эсаулов. – Минск : Вышейшая школа, 1977. – 216 с.

180. Юдина, Н. А. Обучение учащихся решению математических задач на основе применения методов научного познания / Н. А. Юдина // Омский научный вестник. – 2006. – №9 (47). – С. 76–79.

181. Юдина, Н. А. Исследование планиметрической задачи как необходимый компонент методики обучения учащихся ее решению / Н. А. Юдина // Омский научный вестник. – 2009. – № 5 (81). – С.190–192.

182. Якиманская, И. С. Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская. – Москва : Педагогика, 1980. – 240 с.

183. Яремко, Н. Н. О необходимости включения некорректных задач в содержание школьного математического образования / Н. Н. Яремко, Е. Г. Журавлева // Актуальные проблемы современного образования. – 2017. – № 2(23). – С. 122–128.

Приложение 1

Материалы констатирующего эксперимента

Анкета для учащихся

Выберите из перечисленных действий те, которые вызывают у вас наибольшее затруднения при решении планиметрических задач. *(Возможно выбрать не более трех пунктов)*.

Укажите для выбранных действий степень сложности: I – сложно, II – очень сложно.

Таблица 1

Таблица для проведения анкетирования

Действие	**Степень сложности**
Построение чертежа	
Выявление данных задачи, известных, неизвестных, искомых величин	
Выведение следствий из условия задачи	
Выбор необходимой формулы/теоремы	
Вычисление	
Установление полноты, избыточности или недостаточности данных в условии задачи	

Результаты анкетирования учащихся 8-го (23 человека) и 9-го (21 человек) классов Городищенской МБОУ СОШ №1 представлены на рисунках 1 и 2, студентов 5 курса факультета МИФ ВГСПУ (30 человек) – на рисунке 3, общие результаты анкетирования (74 человека) – на рисунке 4.

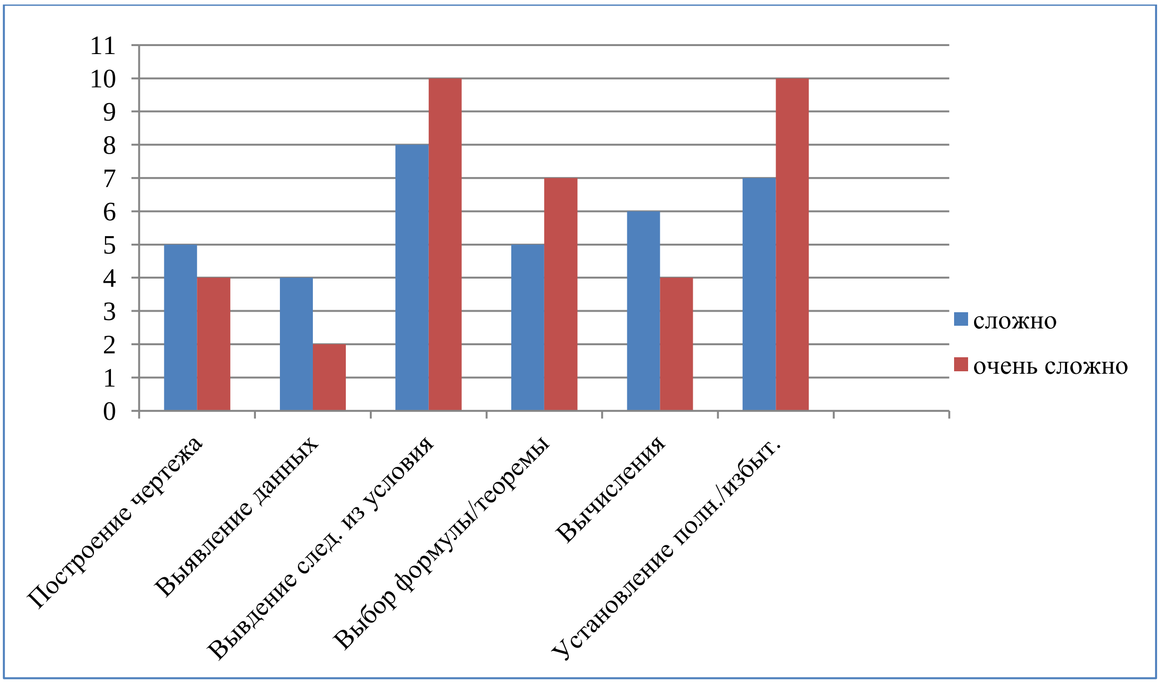


Рисунок 1. Результаты анкетирования учащихся 8-го класса

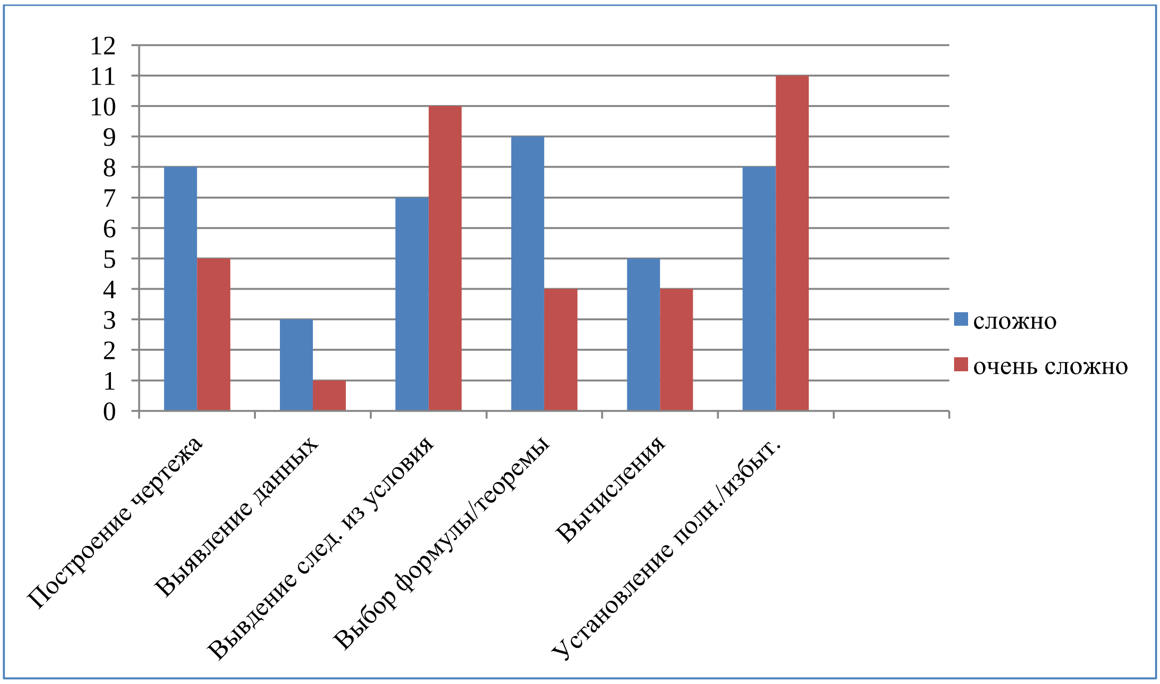


Рисунок 2. Результаты анкетирования учащихся 9-го класса

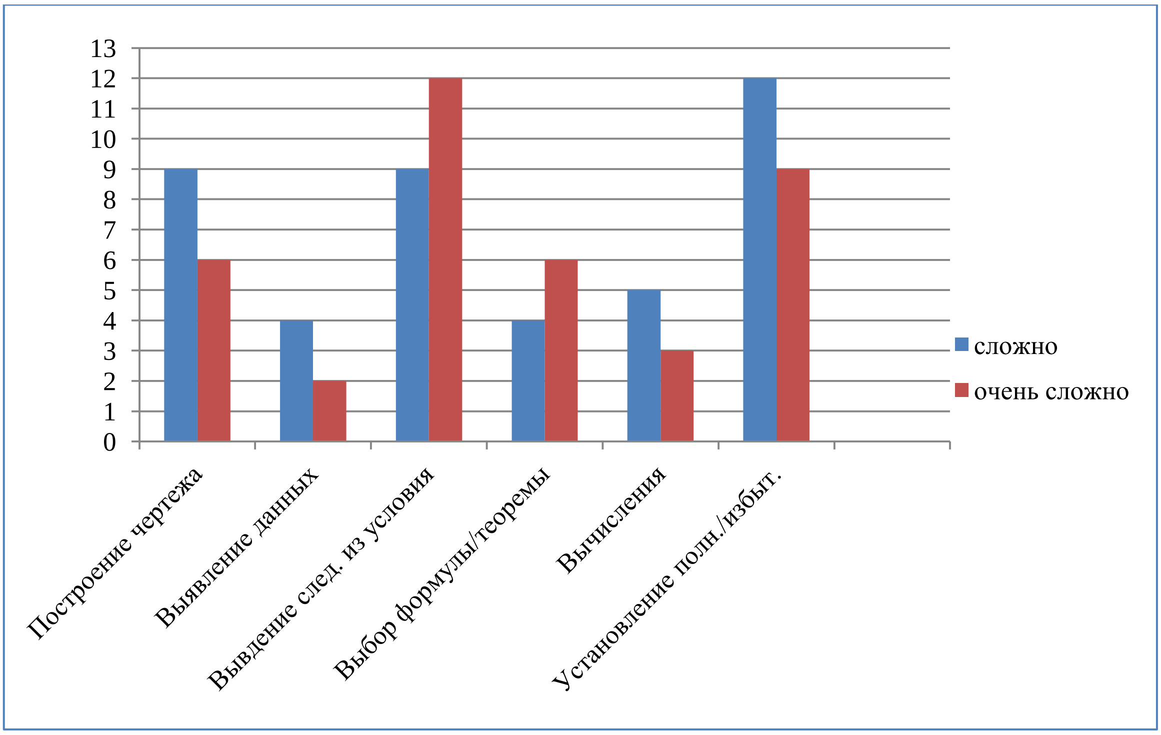


Рисунок 3. Результаты анкетирования студентов 5 курса факультета МИФ ВГСПУ

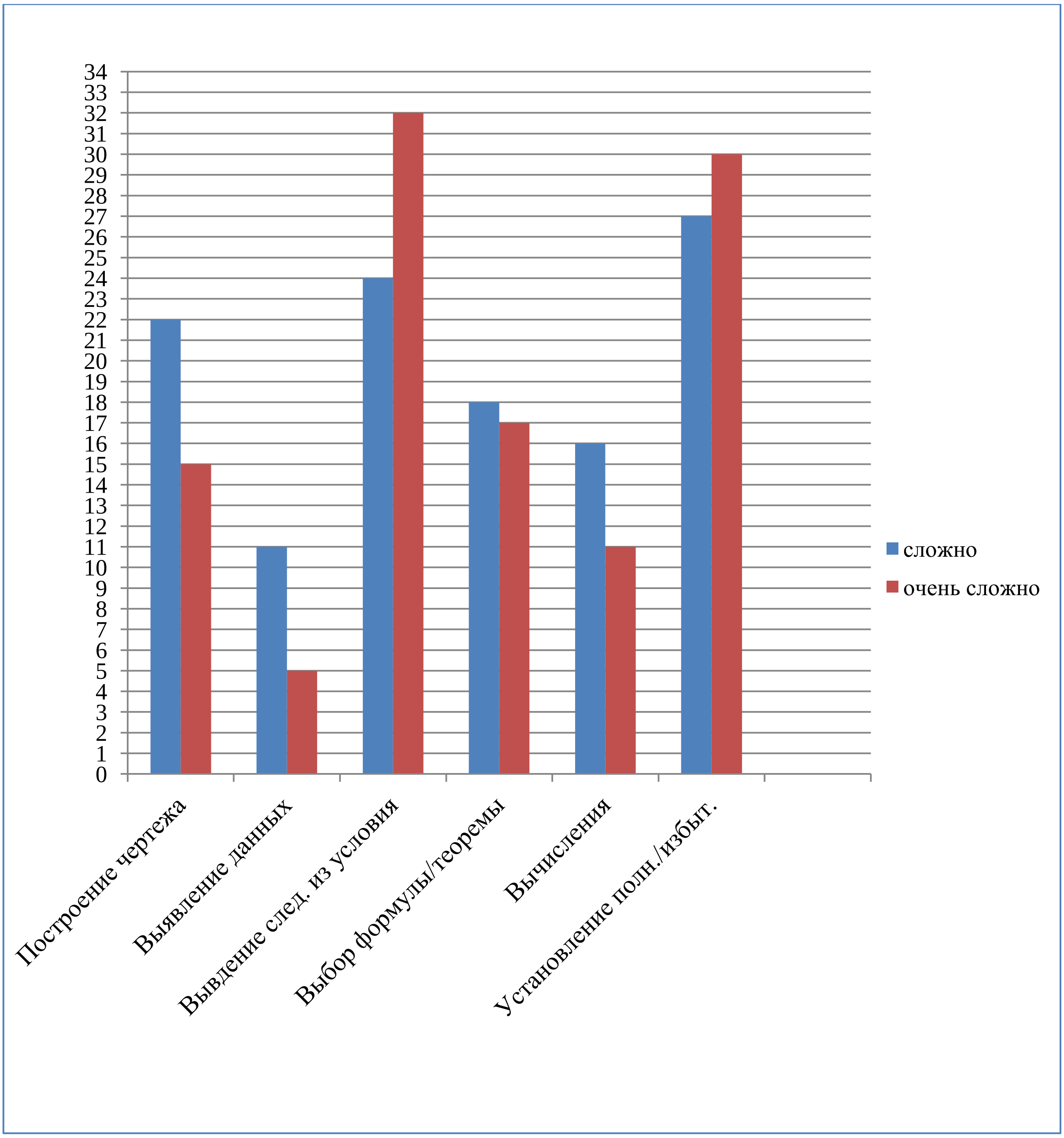


Рисунок 4. Итоговые результаты анкетирования

Приложение 2

Примеры компонентных систем задач по разным темам курса планиметрии

Фрагмент урока в 7 классе по теме «Сумма углов треугольника»

Цель: закрепить теорему о сумме углов треугольника, повторить свойства равнобедренного треугольника.

Учитель: одному из учащихся необходимо составить условие задачи по чертежу, другому – решить ее (рис.1).

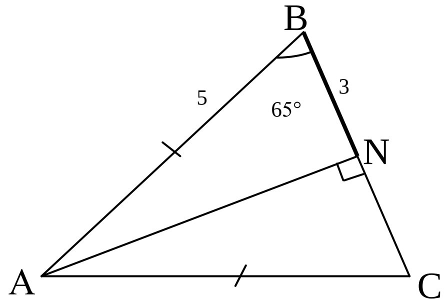


Рис. 1. Чертеж к задаче

Ученик: Найти периметр треугольника *ABC*.

Ученик: Если треугольник равнобедренный, то *AB = AC = 5*. *BN = NC = 3* (по свойству равнобедренного треугольника), значит $P_{ABC} = 5 + 6 + 5 = 16$.

Ученик: Найти угол *C* треугольника *ABC*.

Ученик: Если треугольник *ABC* – равнобедренный, то $\angle B = \angle C = 65°$.

Ученик: Найти угол *A* треугольника *ABC*.

Ученик: По сумме углов треугольника $\angle A = 180° - (65° + 65°) = 50°$.

Ученик: Найти углы *BAN* и *NAC*.

Ученик: Так как по свойству равнобедренного треугольника *AN* является биссектрисой, то $\angle BAN = \angle NAC = 50°: 2 = 25°$.

Учитель: Можно ли найти эти углы другим способом? Ученик: Возможно рассмотреть треугольник BAN и воспользоваться теоремой о сумме углов треугольника. $\angle BAN = 180° - (65° + 90°) = 25°$. Аналогично для угла NAC.

Учитель: Возможно ли еще придумать задачи? Ученик: Да. Найдите углы при вершинах *A*, *B*, *C*.

Ученик: По определению смежных углов $\angle B = 180° - 65° = 115°$, $\angle C = 180° - 65° = 115°$, $\angle A = 180° - 50° = 130°$.

Учитель: Аналогичное задание к следующему чертежу (рис. 2).

На данном чертеже не указанно точно, какой именно отрезок равен 10, это может быть и отрезок AC и отрезок AH. В ходе составления задач необходимо установить, что второй случай невозможен, так как треугольник с такими сторонами не существует.

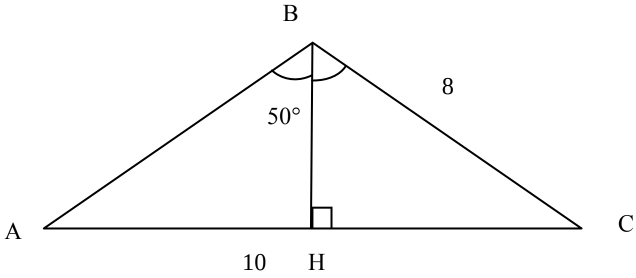


Рис. 2. Чертеж к задаче

Фрагмент урока в 8 классе по теме «Теорема Пифагора»

После изучения теоремы Пифагора необходимо вспомнить свойство катета, лежащего напротив угла $30°$, и расширить его сведениями про катет, лежащий напротив угла $60°$. Применяя теорему Пифагора для различных прямоугольных треугольников с углом $30°$, устанавливаем, что катет, лежащий напротив угла $60°$, в $\sqrt{3}$ раз больше катета, лежащего напротив угла $30°$.

Учитель: Составьте условие задач по чертежам (рис. 3). Отметьте на чертеже другим цветом то, что можно найти по условию, и выполните соответствующие вычисления.

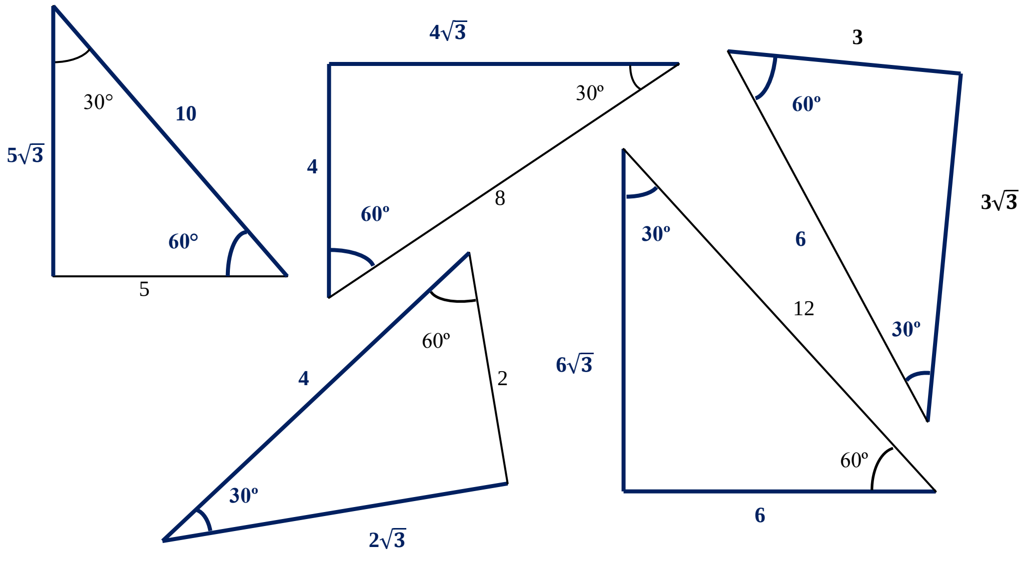


Рис. 3. Составить условие

Фрагмент урока по теме «Параллелограмм»

(пример применения компонентной системы задач)

Задача**: Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 и 14 (рис. 4).**

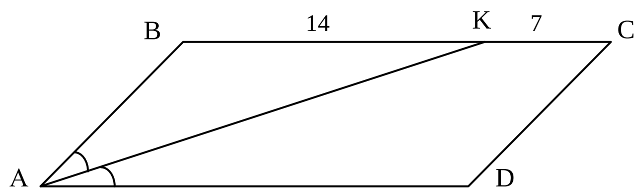


Рис. 4. Чертеж к задаче

Учитель: Назовите известные отрезки.

Ученик: *ВК=14, КС=7.*

Учитель: Элементами каких фигур они являются?

Ученик: *ВК* – большая часть стороны *ВС* параллелограмма *ABCD,* сторона треугольника *ABK.*

Ученик: *КС* – меньшая часть стороны *ВС* параллелограмма *ABCD,* сторона трапеции *AKCD.*

Учитель: Элементом каких фигур является отрезок *АК?*

Ученик: *АК* – биссектриса параллелограмма *ABCD*. *АК* – сторона треугольника *ABK*. *АК* – сторона трапеции *AKCD.*

Учитель: Назовите параллельные/равные стороны. Почему?

Ученик: *AB = CD, BC = AD = 21.*Эти же пары сторон параллельны по определению параллелограмма.

Учитель: Назовите равные углы. Почему?

Ученик: *A* и *C*, *B* и *D* – как углы параллелограмма. *BAK* и *KAD*, потому что *АК* – биссектриса, *KAD* и *AKB* – как накрестлежащие при параллельных прямых *BC* и *AD* и секущей *АК.*

Учитель: Определите вид треугольника *AKB* и трапеции *AKCD.*

Ученик: Треугольник *AKB* – равнобедренный, трапеция *AKCD* – разносторонняя.

Учитель: Почему треугольник *AKB* – равнобедренный?

Ученик: Так как углы *BAK* и *BKA* равны.

Учитель: Назовите равные стороны треугольника. Почему они равны?

Ученик: AB = BK = 14 по определению равнобедренного треугольника.

Учитель: Что нужно найти по условию задачи и что нужно для этого знать?

Ученик: Периметр. Необходимо знать длины всех сторон.

Учитель: Можем ли мы решить задачу?

Ученик: Да. Так AB = CD = 14, BC = AD = 21, $P = 2 \cdot (14 + 21) = 70$ см.

Учитель: Могли бы мы провести биссектрису из другого угла? Почему? Проведите ее.

Ученик: Возможно провести биссектрису, например, из угла. В условии нет точного указания для какого угла проведена биссектриса (рис. 5).

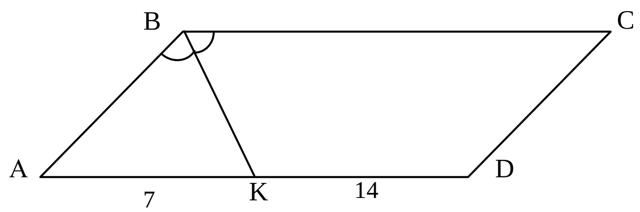


Рис. 5. Чертеж к задаче

Учитель: Назовите равные углы в этом случае?

Ученик: Углы *ABK*, *KBC, BKA*.

Учитель: Решите задачу для этого случая.

Ученик: Треугольник *ABK* – равнобедренный. AB = AK = 7. Тогда AB = CD = 7, BC = AD = 21, $P = 2 \cdot (7 + 21) = 56$ см.

Учитель: Попробуйте переформулировать условие задачи так, чтобы не изменился ход решения.

Ученик: Отрезок *BK* делит сторону *AD* на отрезки 7 и 14 см. При этом углы *ABK* и *AKB* равны. Найдите периметр.

Учитель: Какой на ваш взгляд вывод из тех, которые мы сделали в ходе решения задачи, является ключевым?

Ученик: Нахождение накрестлежащих углов.

Ученик: Вывод о том, что треугольник *ABK* – равнобедренный.

Учитель: Действительно, ключевым моментом является равнобедренный треугольник – во всех задачах именно он помогает отыскать сторону параллелограмма. Можно ли тогда переформулировать задачу так: «Отрезок *ВК* делит сторону *AD* на отрезки 7 и 14 см. При этом треугольник *ABK* – равнобедренный». Почему?

Ученик: Да, можно. Мы можем сделать вывод о равенстве углов *ABK* и *AKB* и соответственно сторон *AB* и *AK*.

Учитель: Но разве утверждение, что треугольник равнобедренный, означает равенство именно этих углов?

Ученик: Действительно, могут быть равны пары других углов, например, *ABK* и *BAK*. Тогда равными сторонами будут *BK* и *AK*. И найти сторону параллелограмма мы не сможем.

Учитель: Составьте обратную задачу для исходной и решите ее.

Ученик: Периметр параллелограмма *ABCD* равен 70 см, сторона AB = 14 $см$. Найдите отрезки, на которые делит сторону *BC* биссектриса угла A.

Учитель составляет задачу, если учащиеся затрудняются сделать это самостоятельно.

Ученик: Зная периметр и одну сторону, мы можем найти другую сторону параллелограмма $\text{BC} = (70 - 2 \cdot 14) \div 2 = 21$. Треугольник *ABK* – равнобедренный (по доказанному выше), значит *AB* = *BK*= 14, а *BC* = 7.

Задача: Периметр параллелограмма *ABCD* равен 50 см, угол *C* равен 30^o, а перпендикуляр *BH* к прямой *CD* равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

Начиная решать задачу, учащиеся, как правило, изображают чертеж с привычным обозначением букв по часовой стрелке (рис. 6).

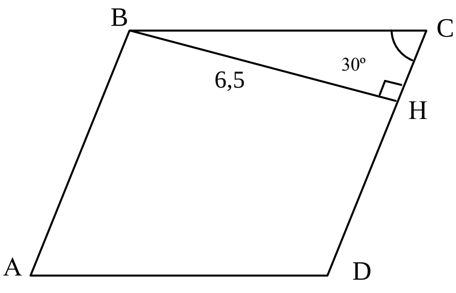


Рис. 6. Чертеж к задаче

Учитель: Назовите равные отрезки. Почему они равны?

Ученик: *AD* = *BC*, *DC* = *AB* по определению параллелограмма.

Учитель: Чему равен отрезок *BH* и элементом каких фигур он является?

Ученик: Высота параллелограмма, сторона треугольника *BCH* и сторона трапеции *ABHD*.

Учитель: Элементом каких фигур является отрезок *BC*.

Ученик: Сторона параллелограмма, сторона треугольника *BCH*.

Учитель: Назовите прямоугольный треугольник. Ученик: *BHC*.

Учитель: Найдите все углы этого треугольника.

Ученик: $\angle BCH = 30^o$, $\angle CHB = 90^o$, $\angle CBH = 90°–30° = 60^o$.

Учитель: Назовите катет, который лежит напротив угла 30º, напротив угла 60º, гипотенузу.

Ученик: *BH* лежит напротив угла 30º, *HC* – напротив угла 60º, *BC* – гипотенуза.

Учитель: Найдите противоречие на рисунке (рис.7).

Ученик: Катет, лежащий напротив угла 60°, должен быть больше катета, лежащего напротив угла 30°, *CH* > *BH*.

Учитель: Значит, наш чертеж визуально не соответствует условию. Необходимо построить новый.

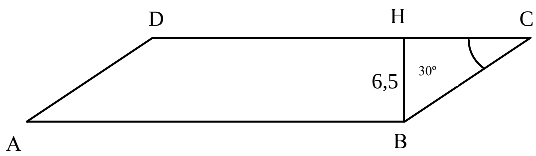


Рис. 7. Чертеж к задаче

Учитель: Что вы можете найти в треугольнике *BHC*? Каким свойством обладает прямоугольный треугольник с углом 30º?

Ученик: Катет, лежащий напротив угла 30º равен половине гипотенузы. Можем найти гипотенузу.

Учитель: Найдите гипотенузу.

Ученик: $\mathrm{BC} = 6{,}5 \cdot 2 = 13$ см.

Учитель: Можем ли мы найти стороны?

Ученик: Да. $AD = DC = 13$, $AB = DC = (50 - 2 \cdot 13) \div 2 = 12$ см.

Учитель: Составьте и решите обратную задачу.

Ученик (*например*): Периметр параллелограмма *ABCD* равен 50 см. Сторона *AB* = 12 см. Угол С равен 30º. Найдите высоту.

Ученик (*например*): Периметр параллелограмма *ABCD* равен 50 см. Сторона *AB* = 12 см, высота *BH* = 6,5 см. Найдите острый угол параллелограмма.

При решении таких задач необходимо установить, к какой стороне опущен перпендикуляр из точки *B*. В противном случае задача становится вариативной.

Учащиеся могут составлять разные обратные задачи. Необходимо рассмотреть каждый вариант и обсудить решение, если оно есть.

Начальные геометрические сведения

1. **Угол *DCL* равен 126º, *CM* – биссектриса этого угла. Найдите угол *MCL*.**

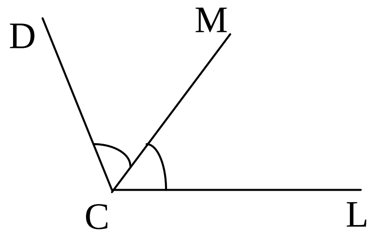


Рис. 8. Чертеж к задаче 1

— Назовите все углы (*DCL, DCM, MCL*).

— Элементом каких фигур является отрезок *CM?* (биссектриса угла *DCL,* сторона углов *DCM* и *MCL*.)

— Какой угол известен? (∠*DCL* = 126º.)

— Назовите равные углы. Почему? (∠*DCM* = ∠*MCL,* так как *CM* – биссектриса.)

— Переформулируйте условие в равносильное. (Угол *DCL* равен 126º, отрезок *CM* делит его на два равных угла. Найдите угол *MCL*.)

— Сформулируйте обратную задачу. (Найдите угол *DCL*. Если *CM* – биссектриса этого угла и угол *MCL* равен 63º.)

— Возможно ли другое расположение точек? Меняется ли решение при том? (Возможно, не меняется.)

2. **Из точки *B* проведены три луча: *BM, BN* и *BK*. Найдите угол *NBK,* если угол *MBN* равен 84º, а угол *MBK* равен 22º.**

— Какие углы известны? (*MBN, MBK*.)

— Возможно ли другое расположение точек? (Да.)

— Какое? Меняется ли ход решения? (Да, меняется рис. 9.)

— Возможен ли случай, когда луч *BN* расположен между двумя другими? (Нет.)

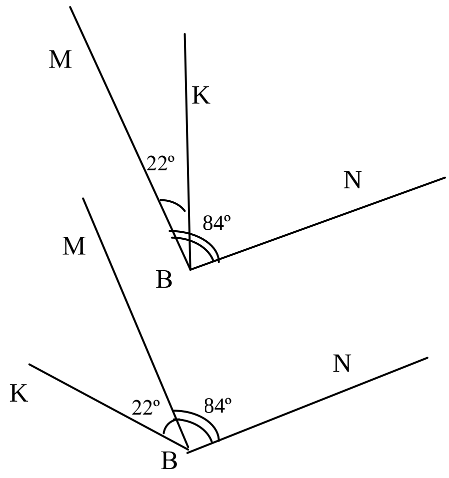


Рис. 9. Чертежи к задаче 2

— Составьте обратные задачи. (Например: Из точки *B* проведены три луча: *BM, BN* и *BK*. Найдите угол *MBK*, если угол *MBN* равен 84º, а угол *NBK* равен 62º).

3. **Найдите углы равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *AC*, если угол 1 равен 41º, а угол 2 равен 82º (рис.10).**

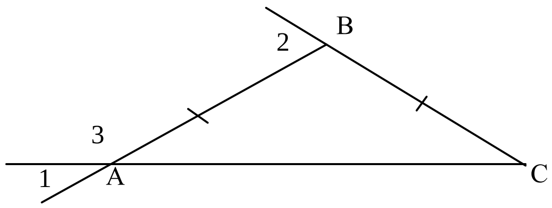


Рис. 10. Чертеж к задаче 3

— Назовите равные стороны. (*AB* и *BC*.)

— Назовите равные углы. Почему они равны? (угол 1 равен углу *BAC* как вертикальные, угол *BAC* равен углу *BCA*, так как треугольник равнобедренный.)

— Назовите смежные углы. Чему равна сумма смежных углов? (Угол 2 и *ABC,* угол 3 и угол *BAC,* сумма равна 180º.)

— Возможно ли другое расположение точек? (Нет.)

— Составьте задачу обратную данной. (Найдите углы равнобедренного треугольника *ABC* и углы 2, 1, если угол *BCA* равен 41º.)

4. **Треугольник *ABC* – равнобедренный с основанием *AC*. На его биссектрисе *BD* взята точка *M*, а на основании – точка *K*. причем *MK* параллельно *AB*. Найдите углы треугольника *MKD*, если угол *ABC* равен 126º, угол *BAC* равен 27º (рис.11).**

— Назовите равные стороны. (*AB* и *BC*.)

— Назовите равные углы. (Углы *BAD* и *BCD*, углы *ABD* и *DBC*.)

— Назовите параллельные отрезки. (*AB* и *KM*.)

— Назовите накрестлежащие углы при данных параллельных сторонах. (*ABD* и *KMD*, *BAK* и *MKD*.)

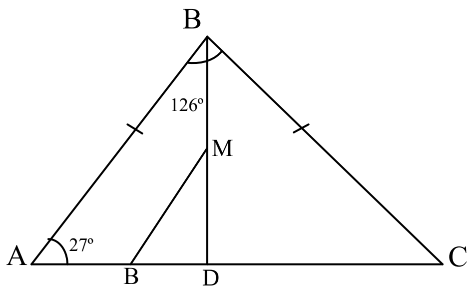


Рис. 11. Чертеж к задаче 4

— Каким свойством они обладают? (Они равны).

— Элементом каких фигур является отрезок *BD*? (Биссектриса, высота и медиана треугольника *ABC*, сторона прямоугольных треугольников *ABD*, *BDC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AB*? (Сторона треугольников *ABC* и *ABD*, сторона трапеции *ABMK*).

— Элементом каких фигур является отрезок *KM*? (Сторона треугольника *KMD*, сторона трапеции *ABMK*.)

— Назовите прямоугольные треугольники? (*ABD*, *BDC*, *KMD*.)

— Возможно ли другое расположение точек? Меняет ли ход решения? (Возможно, ход решения не меняет.)

— Составьте задачу обратную данной. (Например: Треугольник *ABC* – равнобедренный с основанием *AC*. На его биссектрисе *BD* взята точка *M*, а на основании – точка *K*. Угол *ABC* равен 126°, угол $\angle BAC = \angle MKD = 27°$, углы *ABD* и *KMD* равны. Докажите, что *MK* параллельно *AB*.)

Приложение 3

Задачи на отработку свойств параллелограмма

1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр 40 см (рис.1).

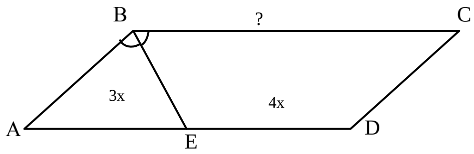


Рис.1. Чертеж к задаче 1

— Элементом каких фигур является отрезок *BE?* (Биссектриса параллелограмма *ABCD,* сторона треугольника *ABE,* секущая при параллельных *AD* и *BC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AB?* (Сторона параллелограмма *ABCD,* сторона треугольника *ABE,* секущая при параллельных *AD* и *BC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AE?* (Часть стороны параллелограмма *ABCD*, сторона треугольника *AB*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *BC?* (Сторона параллелограмма *ABCD*, сторона трапеции *EBCD*, секущая при параллельных *AB* и *CD*.)

— Элементами каких фигур является отрезок *ED?* (Часть стороны параллелограмма *ABCD,* сторона трапеции *EBCD*.)

— Назовите параллельные отрезки. (*AB* и *CD, AD* и *BC*.)

— Назовите равные углы. Почему они равны? (*A* и *C*, *B* и *D* – углы параллелограмма, *ABE* и *EBC* – так как *BE* – биссектриса по условию, *EBC* и *BEA* – как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых *AD* и *BC* секущей *BE*.)

— Назовите равные отрезки. Почему они равны? (*AB* и *CD, BC* и *AD* – по определению параллелограмма, *AB* и *AE* – так как треугольник *ABE* – равнобедренный.)

— Что требуется найти? (Периметр.)

— Что такое периметр? (Сумма длин всех сторон.)

— Составьте задачу обратную данной. (Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону на отрезки 6 и 8 см, считая от вершины острого угла. Найдите периметр параллелограмма.)

— Составьте нестандартизированную задачу. (Биссектриса угла параллелограмма делит противоположную сторону на отрезки 6 и 8 см. Найдите периметр параллелограмма.)

— Сформулируйте ключевую идею задачи. (Биссектриса тупого угла параллелограмма отсекает равнобедренный треугольник.)

2. Докажите, что биссектрисы односторонних углов параллелограмма перпендикулярны.

— Элементом каких фигур является отрезок *BE?* (Биссектриса угла *B* параллелограмма *ABCD,* сторона треугольника *ABE,* секущая при параллельных *AD* и *BC*.)

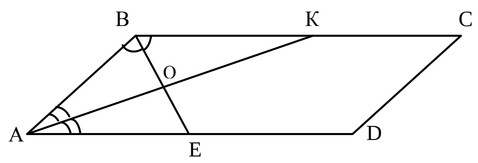


Рис. 2. Чертеж к задаче 2

— Элементом каких фигур является отрезок *AB?* (Сторона параллелограмма *ABCD*, сторона треугольника *ABE,* секущая при параллельных *AD* и *BC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AE?* (Часть стороны параллелограмма *ABCD*, сторона треугольника *AB*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AK?* (Биссектриса угла *A* параллелограмма *ABCD*, сторона треугольника *ABE,* секущая при параллельных *AD* и *BC*.)

— Назовите параллельные отрезки. (*AB* и *CD, AD* и *BC).*

— Назовите равные углы. Почему они равны? (*A* и *C, B* и *D* – углы параллелограмма, *ABE* и *EBC* – так как *BE* является биссектрисой по условию, *BAK* и *KAE* – так как *AK* является биссектрисой по условию.

EBC и *BEA* – как накрестлежащие при пересечении параллельных прямых *AD* и *BC* секущей *BE. KAE* и *BKA* – как накрестлежащие при пересечении параллельных прямых *AD* и *BC* секущей *AK*.)

— Назовите равные отрезки. Почему они равны? (*AB* и *CD, BC* и *AD* – по определению параллелограмма. *AB* и *AE,* так как треугольник *ABE* – равнобедренный. *AB* и *BK,* так как треугольник *ABK* – равнобедренный. А значит, *BK = AE = AB*.)

— Назовите пары углов, сумма которых равна 180°. (*ABC* и *BAD, BCD* и *CDA, KBE* и *BED, CKA* и *KAE*.)

— Что требуется доказать? Что значит перпендикулярность? (Что биссектрисы пересекаются под углом 90°.)

— Переформулируйте задачу в равносильную данной. (В параллелограмме *ABCD* биссектрисы *BE* и *AK* углов *ABC* и *BAD* соответственно, пересекаются в точке О. Найдите угол *BOA*.)

3. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рис.3).

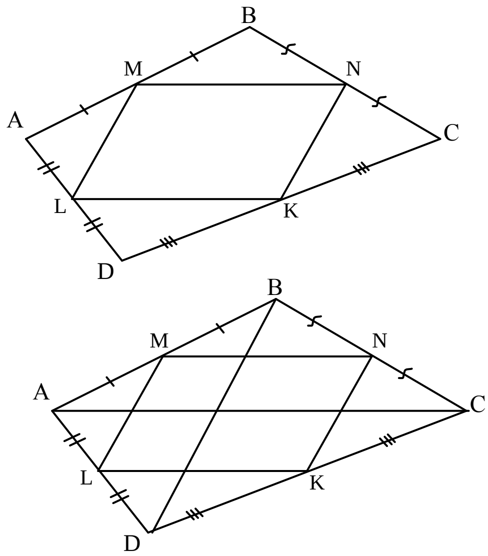


Рис. 3. Чертежи к задаче 3

— Какие отрезки равны и почему? (*AM = MB, BN = NC, CK = DK, AL = LD* по условию.)

— Назовите все треугольники на чертеже. (*LAM, MBN, NCK, KDL*.)

— Можно ли еще получить дополнительные треугольники с помощью некоторых построений? Если да, то каких? (Можно провести диагонали исходного четырехугольника.)

Достраиваем чертеж

— Какие треугольники получились? (*ABC, BCD, DAB* и *ADC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок AC? (AC – диагональ четырехугольника $ABCD$, основание треугольников ABC и ADC.)

— Элементом каких фигур является отрезок MN? (Сторона четырехугольника $LMNK$, средняя линия треугольника ABC.)

— Что такое средняя линия? (Отрезок, соединяющий середины сторон треугольника.)

— Аналогичные вопросы составляются для каждого из отрезков BD, LM, NK, KL.

— Назовите равные отрезки, учитывая выше сказанное. Почему они равны? ($MN = LK = \frac{1}{2}AC$, $NK = LM = \frac{1}{2}DB$.)

— Сформулируйте задачу на отработку ключевой идеи. (Точки M, N, K, L – середины сторон произвольного четырехугольника. MN = 3 см, NK = 6 см. Найдите отрезки KL и LM.)

4. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, если острый угол параллелограмма равен 40°.

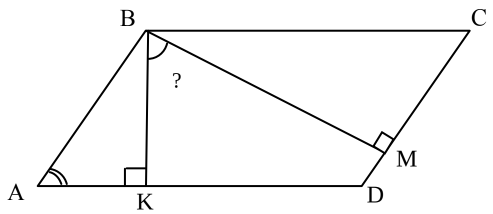


Рис. 4. Чертеж к задаче 4

— Элементом каких фигур является отрезок BK? (Высота параллелограмма $ABCD$, сторона треугольника ABK.)

— Элементом каких фигур является отрезок BM? (Высота параллелограмма $ABCD$, сторона треугольника CBM.)

— Элементом каких фигур является отрезок AB? (Сторона параллелограмма $ABCD$, сторона треугольника ABK.)

— Элементом каких фигур является отрезок BC (Сторона параллелограмма $ABCD$, сторона треугольника CBM.)

— Назовите равные отрезки/параллельные. Почему? (AB и CD, BC и AD по определению параллелограмма.)

— Назовите равные углы. Почему? (Углы *BAD* и *BCD*, *ABC* и *CDA* по свойству параллелограмма; *AKB* и *KBC*, *ABM* и *BMC* – как накрестлежащие при параллельных прямых и секущей.)

— Назовите прямоугольные треугольники. Почему они такие? (*ABK* и *BMC*, так как *BK* и *BM* – высоты по условию.)

— Назовите односторонние углы при пересечении параллельных *AD* и *BC* секущей *AB.* (Углы *BAD* и *ABC*.)

— Чему равна сумма углов треугольника/четырехугольника? (180°, 360°.)

— Переформулируйте условие задачи. (Найдите углы четырехугольника, образованного высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, если острый угол параллелограмма равен 40°.)

— Составьте обратную задачу. (Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла равен 40°, найдите, если острый угол параллелограмма.)

— Составьте вариативную задачу. (Угол между высотами параллелограмма равен 40°, найдите, если острый угол параллелограмма.)

5. Периметр параллелограмма равен 90 см, а его острый угол равен 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма (рис. 5).

— Какой угол известен? (*BAE.*)

— Элементом каких фигур является отрезок BE? (Диагональ параллелограмма *ABCE*, сторона треугольников *ABE* и *BEC*.)

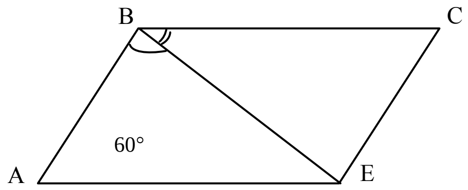


Рис. 5. Чертеж к задаче 5

— Можно ли определить вид полученных треугольников? (Нельзя.)

— Назовите равные отрезки. *(AB* и *CE*, *BC* и *AE*.)

— Назовите параллельные отрезки. (*AB* и *CE*, *BC* и *AE*.)

— Назовите секущие. (*AB, BE, CE* при параллельных прямых *AE* и *BC*; *BC, EC, BE* при параллельных *AB* и *EC*.)

— Назовите односторонние углы параллелограмма. (*A* и *B, C* и *E*.)

— Что такое периметр? (Сумма длин всех сторон.)

— Составьте нестандартизированную задачу. (Периметр параллелограмма равен 90 см, а угол равен 60°. Диагональ параллелограмма делит угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.)

6. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его диагональ на отрезки 3,2 см и 8,8 см. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см (рис. 6).

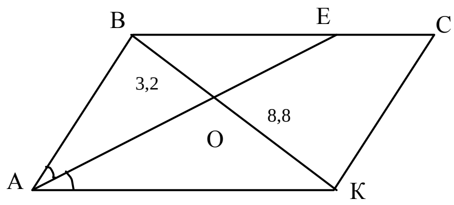


Рис. 6. Чертеж к задаче 6

— Элементом каких фигур является отрезок *AE*? (Биссектриса угла *A,* сторона треугольника *ABE*, сторона трапеции *ECKA*.)

— Назовите все треугольники. (*ABO, BOE, AOK, ABK, ABE*.)

— Назовите равные углы. (*BAE, EAK, BEA; BOE* и *AOK, BOA* и *EOK, BAK* и *BCK, ABO* и *OKC*.)

— Элементом каких фигур является отрезок *AO*? (Биссектриса треугольника *ABK*, сторона треугольников *ABO* и *AOK*.)

— Назовите пропорциональные отрезки треугольника *ABK*. ($\frac{BO}{OK} = \frac{AB}{AK}$.)

— Сформулируйте обратную задачу. (Стороны параллелограмма равны 4 см. и 11 см. Найдите отрезки, на которые делит диагональ биссектриса острого угла параллелограмма.)

7. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а один из углов – 45°. Найдите площадь параллелограмма (рис. 7).

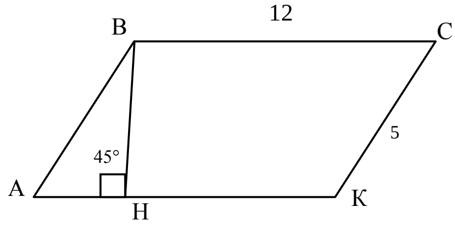


Рис. 7. Чертеж к задаче 7

— Что известно? (Стороны параллелограмма 5 и 12 см, острый угол.)

— Что требуется найти? (Площадь.)

— Что необходимо знать, чтобы найти площадь? (Основание параллелограммы и высоту.)

— Элементом каких фигур является отрезок *ВН*? (Высота параллелограмма *АВСК*, сторона треугольника *ВН*.)

— Определите вид треугольника *АВН*. (Прямоугольный и равнобедренный.)

— Возможно ли другое расположение высоты. (Да, можно опустить высоту на сторону *КС*.)

— Как вы думаете, при таком расположении измениться ли ответ в задаче? (Нет, так как площадь фигуры не измениться при этом.)

— Составьте задачу обратную данной. (Площадь параллелограмма равна $30\sqrt{2}$, острый угол 45°, а стороны 5 и 12 см. Найдите высоту параллелограмма.)

— Составьте нестандартизированную задачу. (Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5. Найдите площадь параллелограмма.)

8. Сторона параллелограмма равна 58, острый угол равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный параллелограмм.

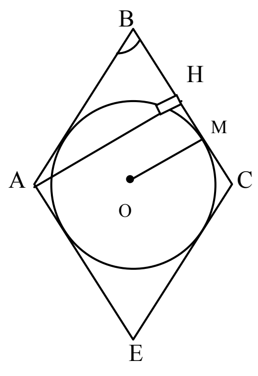


Рис. 8. Чертеж к задаче 8

— Что известно? (*АВСЕ* – параллелограмм со стороной 58, угол *В* равен 30°.)

— Что требуется найти? (Радиус вписанной окружности.)

— При каком условии окружность можно вписать в четырехугольник? (Необходимо, чтобы суммы противоположных сторон были равны: *АВ*+*ЕС*=*ВС*+*АЕ*.)

— Какой вывод можно сделать о виде параллелограмма из данного утверждения? (В данном случае параллелограмм является ромбом, иначе не будет выполнятся условие.)
— Назовите равные отрезки на чертеже. ($AB = EC = BC = AE$.)
— Элементом каких фигур является отрезок AH? (Высота ромба $ABCE$, катет треугольника ABH.)
— Каким свойством обладает катет, лежащий напротив угла 30°. (Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.)
— Назовите отрезок, который является радиусом окружности на чертеже. (OM.)
— Можно ли еще провести радиусы окружности? Сколько? (Бесконечно много). Составьте задачу обратную данной. (Радиус окружности, вписанной в параллелограмм равен 14, а один из углов – 30°. Найдите стороны параллелограмма.)
— Составьте задачу на отработку ключевой идеи. (Сторона параллелограмма равна 10, острый угол равен 45°. Найдите радиус вписанной окружности в данный параллелограмм.)